

## ریاضیات گسسته

۱ گزاره زیر را به روش بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز) ثابت کنید:  
"برای هر دو عدد حقیقی  $x$  و  $y$  داریم:  $y^2 + 1 \geq -2x(y + x + 1)$ "

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته دی ۱۴۰۱

درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید:

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته دی ۱۴۰۱

۲ اگر  $x$  یک عدد گنگ باشد،  $\frac{1}{x}$  نیز عددی گنگ است.

۳ اگر  $a|b + c$  آنگاه  $a|b$  یا  $a|c$ .

۴ برای مقادیر حقیقی و ناصفر  $a$  و  $b$  به شرط آنکه  $a + b \neq 0$  تساوی  $\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$  برقرار است.

۵ دو مربع لاتین متعامد از مرتبه ۶ وجود ندارد.

گزاره‌های درست را مشخص کرده و برای گزاره‌های نادرست، مثال نقض ارائه کنید.

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته دی ۱۳۹۹

۶ برای هر عدد طبیعی  $n$  بزرگ‌تر از ۱، عدد  $2^n - 1$  اول است.

۷ برای دو عدد طبیعی  $a$  و  $b$ ، اگر  $a|b$  آنگاه  $[a, b] = |b|$ .

۸ معادله هم‌نهشتی  $ax \equiv b \pmod{m}$  دارای جواب است اگر و تنها اگر  $(a, b)|m$ .

۹  $a_1, a_2, a_3$  و  $b_1, b_2, b_3$  هم همان اعداد ولی به ترتیب دیگری قرار گرفته‌اند. ثابت کنید  $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)$  عددی زوج است.

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته شهریور ۱۴۰۱

هر یک از گزاره‌های زیر را اثبات و یا با ارائه مثال نقض کنید.

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته شهریور ۱۴۰۱

۱۰ برای هر عدد طبیعی  $n$ ، عدد  $2^n + 1$  اول است.

۱۱ مربع هر عدد فرد، عددی فرد است.

۱۲ عبارت مناسب را از داخل پرانتز انتخاب کنید.

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته دی ۱۴۰۰

الف حاصل ضرب هر عدد گویای ناصفر در یک عدد گنگ، عددی (گنگ، گویا) است.

ب اگر برای دو عدد صحیح  $a$  و  $b$  داشته باشیم  $a|b$ ، برای هر  $m \in \mathbb{Z}$  داریم:  $(a|mb, ma|b)$

پ اگر  $a|b$  آنگاه  $b$ ،  $m$  و  $a$  دو عدد صحیح با  $(a, |a|)$  برابر است.

ت اگر  $(c, m) = d$  و  $ac \equiv bc \pmod{m}$ ، آنگاه رابطه  $a \equiv b \pmod{m}$  برقرار خواهد بود.

۱۳ اگر  $\alpha$  و  $\beta$  دو عدد گنگ باشند ولی  $\alpha + \beta$  گویا باشد، ثابت کنید  $\alpha - \beta$  گنگ است.

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته دی ۱۴۰۰

برای مشاهده فیلم و جزوات بیشتر بر روی  
لینک زیر کلیک کنید

[www.riazikade.com](http://www.riazikade.com)

ثابت کنید حاصل جمع یک عدد گویا و یک عدد گنگ، عددی گنگ است.

کتاب درسی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته مثال  
امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته شهریور ۱۴۰۰

به روش بازگشتی ثابت کنید حاصل ضرب هردو عدد حقیقی، کوچک‌تر یا مساوی نصف مجموع مربعات آن‌ها است.

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته خرداد ۱۴۰۰

درست یا نادرست بودن گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته خرداد ۱۴۰۰

حاصل ضرب سه عدد طبیعی متوالی بر ۶ بخش‌پذیر است.

هیچ عدد صحیحی مانند  $x$  و  $y$  وجود ندارند که رابطه  $x^2 + y^2 = (x + y)^2$  برقرار باشد.

اگر  $\alpha$  و  $\beta$  دو عدد گنگ باشند ولی  $\alpha + \beta$  گویا باشد، با استفاده از برهان خلف ثابت کنید  $\alpha - \beta$  گنگ است.

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته دی ۱۳۹۹

برای مشاهده فیلم و جزوات بیشتر بر روی  
لینک زیر کلیک کنید

[www.riazikade.com](http://www.riazikade.com)

اگر  $x$  و  $y$  دو عدد حقیقی مثبت باشند، ثابت کنید  $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ .

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته خرداد ۱۳۹۹

گزاره درست را اثبات کنید و برای گزاره نادرست، مثال نقض ارائه دهید.

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته خرداد ۱۳۹۹

۲۰ مجموع هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است.

۲۱ اگر از مربع عددی فرد یک واحد کم کنیم، حاصل همواره بر ۸ بخش پذیر است.

۲۲ ثابت کنید اگر  $a$  و  $b$  دو عدد حقیقی نامنفی باشند، داریم:  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته شهریور ۱۳۹۹

درست یا نادرست بودن گزاره‌های زیر را تعیین کنید.

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته شهریور ۱۳۹۹

۲۳ برای هر دو عدد حقیقی  $x$  و  $y$  داریم:  $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

۲۴ اگر  $a$  و  $b$  دو عدد حقیقی باشند و  $ab = 0$ ، آن‌گاه  $a = 0$  یا  $b = 0$ .

۲۵ اگر  $a, b \in \mathbb{R}$ ، داریم:  $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$

۲۶ حاصل جمع هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است.

۲۷ به روش بازگشتی ثابت کنید، اگر  $a > 0$  آنگاه  $a + \frac{1}{a} \geq 2$ .

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته دی ۱۳۹۸

۲۸ برای هر سه عدد حقیقی  $x, y$  و  $z$  ثابت کنید:

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz$$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته شهریور ۱۳۹۸

درستی یا نادرستی جملات زیر را مشخص کنید.

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته شهریور ۱۳۹۸

۲۹ مجموع هر دو عدد فرد، عددی زوج است.

۳۰ برای هر عدد طبیعی  $n$  بزرگتر از ۱، عدد  $2^n - 1$  اول است.

۳۱ ثابت کنید میانگین حسابی دو عدد نامنفی از میانگین هندسی آنها کمتر نیست.

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته خرداد ۱۳۹۸

درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته دی ۱۳۹۷

۳۲ اگر  $k$  حاصل ضرب دو عدد طبیعی متوالی باشد، آنگاه  $4k + 1$  مربع کامل است.

۳۳ هر دو عدد صحیح و متوالی نسبت به هم اول‌اند.

۳۴ گراف حاصل از مدل‌سازی پل کونیگسبرگ یک گراف ساده است.

۳۵ گراف ۳ منتظم از مرتبه ۵ قابل رسم نیست.

۳۶ گزاره زیر را به روش بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز) ثابت کنید:  
(برای هر دو عدد حقیقی  $x$  و  $y$  داریم:  $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$ )

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته دی ۱۳۹۷

برای مشاهده فیلم و جزوات بیشتر بر روی  
لینک زیر کلیک کنید

[www.riazikade.com](http://www.riazikade.com)

اگر  $\alpha$  و  $\beta$  دو عدد گنگ باشند ولی  $\alpha + \beta$  گویا باشد، ثابت کنید  $\alpha + 2\beta$  گنگ است.

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته دی ۱۳۹۷

پاسخ

## ریاضیات گسسته

۱

$$y^2 + 1 \geq -2x(y + x + 1) \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2xy + x^2 + 2x + 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)^2 + (x + y)^2 \geq 0 \Rightarrow \text{این رابطه بازگشتی همواره بدیهی است}$$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته دی ۱۴۰۱

پاسخ سؤالات ۲ تا ۵

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته دی ۱۴۰۱

برای مشاهده فیلم و جزوات بیشتر بر روی  
لینک زیر کلیک کنید

[www.riazikade.com](http://www.riazikade.com)

۲ درست

۳ نادرست

۴ نادرست

۵ درست

پاسخ سؤالات ۶ تا ۸

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته دی ۱۳۹۹

۶ نادرست

$$n = 4 \Rightarrow 2^4 - 1 = 15 \notin P$$

۷ درست

۸ نادرست

معادله هم‌نهمشی  $ax \equiv b \pmod{m}$  دارای جواب است اگر و تنها اگر  $(a, m) | b$ .



۹

اگر  $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)$  زوج نباشد (فرض خلف) پس عددی فرد است، پس هر سه عامل  $(a_1 - b_1)$ ،  $(a_2 - b_2)$  و  $(a_3 - b_3)$  هم باید فرد باشند، در نتیجه مجموع آن‌ها هم باید فرد باشد. اما باتوجه به فرض مسأله: مجموع این سه عبارت برابر صفر است که عددی زوج است، باتوجه به تناقض ایجاد شده، فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود.

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته شهریور ۱۴۰۱

پاسخ سؤالات ۱۰ تا ۱۱

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته شهریور ۱۴۰۱

۱۰

نادرست، مثال نقض:  $n = ۳$

۱۱

درست، اثبات:

$$a = 2k + 1 \Rightarrow a^2 = (2k + 1)^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2k' + 1$$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته دی ۱۴۰۰

۱۲

الف گنگ

ب  $a|mb$

پ  $|a|$

ت  $a \equiv b$

۱۳

فرض خلف: فرض کنیم  $\alpha - \beta$  گویا باشد. می‌دانیم جمع دو عدد گویا عددی گویا است، پس  $(\alpha + \beta) + (\alpha - \beta) \in \mathbb{Q}$ ، یعنی  $2\alpha \in \mathbb{Q}$ . در نتیجه  $\alpha \in \mathbb{Q}$  و این با فرض گنگ بودن  $\alpha$  تناقض دارد. پس فرض خلف باطل و حکم اثبات می‌شود.

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته دی ۱۴۰۰

۱۴

فرض کنیم  $r$  یک عدد گویا و  $x$  یک عدد گنگ است. نشان می‌دهیم که  $r + x$  یک عدد گنگ است. فرض خلف: فرض کنیم  $r + x$  گویا باشد. می‌دانیم تفاضل دو عدد گویا عددی گویا است. پس  $r + x - r \in \mathbb{Q}$ ، یعنی  $x \in \mathbb{Q}$  و این با فرض گنگ بودن  $x$  تناقض دارد. پس فرض خلف باطل و حکم اثبات می‌شود.

کتاب درسی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته مثال

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته شهریور ۱۴۰۰

۱۵

$$xy \leq \frac{x^2 + y^2}{2} \Leftrightarrow 2xy \leq x^2 + y^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2xy \geq 0 \Leftrightarrow (x - y)^2 \geq 0$$

گزاره همواره درست است.

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته خرداد ۱۴۰۰

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته خرداد ۱۴۰۰

۱۶ درست

۱۷ نادرست

۱۸ فرض خلف:  $\alpha - \beta$  گویا است.

$$\begin{cases} \alpha - \beta = m \in \mathbb{Q} \\ \alpha + \beta = n \in \mathbb{Q} \end{cases} \Rightarrow 2\alpha = m + n$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{m+n}{2} \Rightarrow \alpha \in \mathbb{Q}$$

تناقض با فرض است.

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته دی ۱۳۹۹

۱۹

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{x^2 + y^2}{xy} \geq 2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy \Leftrightarrow (x - y)^2 \geq 0$$

چون رابطه آخر درست است، پس با بازگشت روابط، حکم مسئله درست می‌باشد.

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته خرداد ۱۳۹۹

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته خرداد ۱۳۹۹

۲۰ نادرست

$$\sqrt{2}, -\sqrt{2} \in \mathbb{Q}^C, \quad \sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0 \notin \mathbb{Q}^C$$

۲۱ درست

$$(2k+1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k + 1 - 1 = 4k(k+1) = 4 \times 2q = 8q$$

برای مشاهده فیلم و جزوات بیشتر بر روی  
لینک زیر کلیک کنید

[www.riazikade.com](http://www.riazikade.com)

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab} \quad (0/25)$$

$$\Leftrightarrow a+b-2\sqrt{ab} \geq 0 \quad (0/25) \Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0 \quad (0/25)$$

نابرابری آخر برای  $a$  و  $b$  نامنفی همیشه درست است  $(0/25)$ . اثبات بازگشتی و حکم برقرار است  $(0/25)$ .

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته شهریور ۱۳۹۹

پاسخ سؤالات ۲۳ تا ۲۶

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته شهریور ۱۳۹۹

۲۳ نادرست  $(0/25)$

۲۴ درست  $(0/25)$

۲۵ نادرست  $(0/25)$

۲۶ نادرست  $(0/25)$

۲۷

$$a + \frac{1}{a} \geq 2 \Leftrightarrow a^2 + 1 \geq 2a \Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (a-1)^2 \geq 0$$

عبارت بالا همواره برقرار است، پس با برگشت روابط حکم برقرار می‌باشد.

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته دی ۱۳۹۸

۲۸

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz \Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 \geq 2xy + 2yz + 2xz$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2 - 2xy) + (y^2 + z^2 - 2yz) + (x^2 + z^2 - 2xz) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2 + (y-z)^2 + (x-z)^2 \geq 0$$

چون نابرابری آخری همواره درست است پس با بازگشت روابط، حکم برقرار است.

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته شهریور ۱۳۹۸

پاسخ سؤالات ۲۹ تا ۳۰

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته شهریور ۱۳۹۸

۲۹ درست است.

۳۰ نادرست است.

اگر دو عدد نامنفی باشند، حکم چنین خواهد:  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b-2\sqrt{ab} \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 \geq 0$$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته خرداد ۱۳۹۸

پاسخ سؤالات ۳۲ تا ۳۵

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته دی ۱۳۹۷

برای مشاهده فیلم و جزوات بیشتر بر روی  
لینک زیر کلیک کنید

[www.riazikade.com](http://www.riazikade.com)

۳۲ درست (۰/۲۵)

۳۳ درست (۰/۲۵)

۳۴ نادرست (۰/۲۵)

۳۵ درست (۰/۲۵)

۳۶

$$\begin{aligned} & \underbrace{2x^2 + 2y^2 + 2}_{(0/25)} \geq 2xy + 2x + 2y \\ \Leftrightarrow & \underbrace{(x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) + (x^2 - 2xy + y^2)}_{(0/25)} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & (x-1)^2 + (y-1)^2 + (x-y)^2 \geq 0 \quad (0/25) \\ \Leftrightarrow & (x-1)^2 \geq 0, (y-1)^2 \geq 0, (x-y)^2 \geq 0 \quad (0/25) \end{aligned}$$

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته دی ۱۳۹۷

اگر  $\alpha + 2\beta$  گنگ نباشد (فرض خلف)، پس عددی گویا است. (۰/۲۵)

از طرفی طبق فرض  $\alpha + \beta$  نیز عددی گویا است. (۰/۲۵)

می‌دانیم تفاضل دو عدد گویا عددی گویا است. در نتیجه:  $(\alpha + 2\beta) - (\alpha + \beta) = \beta \in \mathbb{Q}$  (۰/۲۵)

اما باتوجه به فرض مسئله:  $\beta$  گنگ است. (۰/۲۵)

باتوجه به تناقض ایجادشده، فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود. (۰/۲۵)

امتحان نهایی ریاضی و فیزیک دوازدهم ریاضیات گسسته دی ۱۳۹۷

برای مشاهده فیلم و جزوات بیشتر بر روی  
لینک زیر کلیک کنید

[www.riazikade.com](http://www.riazikade.com)