

مجموعه ، الگو و دنباله

فصل اول ریاضی پایه دهم
رشته های تجربی و ریاضی فیزیک

طبقه بندی سوالات به صورت موضوعی 

پاسخ کاملا تشریحی 

حل تمامی تمرین ها فعالیت ها و کاردر کلاس های کتاب 

مؤلف:

حبيب هاشمی

درس اول : مجموعه های متناهی و نامتناهی

۱-۱- مجموعه های اعداد

انسان در طول تاریخ بر حسب نیاز خود از مجموعه های مختلف اعداد استفاده کرده است.

برخی از این مجموعه ها که در سال های قبل با آنها آشنا شدید به شرح زیر است.

مجموعه اعداد طبیعی : $N = \{1, 2, 3, \dots\}$

مجموعه اعداد حسابی : $W = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

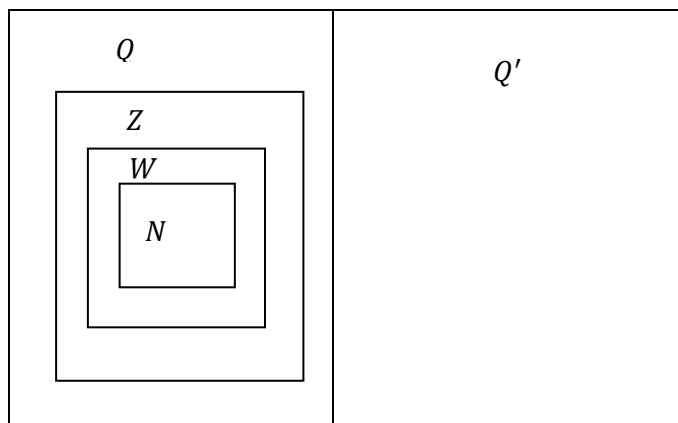
مجموعه اعداد صحیح : $Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

مجموعه اعداد گویا : $Q = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in Z, n \neq 0 \right\}$

مجموعه اعدادی که نتوان آنها را به صورت نسبت دو عدد صحیح نمایش داد : Q' : مجموعه اعداد گنگ

مجموعه اعداد حقیقی : $R = Q \cup Q'$

R



نکته با توجه به شکل بالا داریم:

۱) $N \subseteq W \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R$

۲) $R - Q = Q'$

۳) $R - Q' = Q$

۴) $Q \cap Q' = \emptyset$

بیشتر بدانیم: اعداد گویا به دو دسته تقسیم می شوند

دسته اول: اعداد گویای **مختوم** مانند

$$۰/۲ = \frac{۲}{۱۰} = \frac{۱}{۵}$$

$$۰/۳۵ = \frac{۳۵}{۱۰۰}$$

روش تشخیص اعداد گویای مختوم بدون تقسیم کردن صورت کسر بر مخرج

اگر یک کسر را تا جایی که امکان دارد صورت و مخرج آن را با هم ساده کنیم و مخرج کسر را به عاملهای اول تجزیه کنیم و به غیر از ۲ یا ۵ عامل دیگری نداشته باشد آن عدد یک عدد گویای مختوم است.

$$\frac{۳}{۵} \quad , \quad \frac{۱}{۱۰} = \frac{۱}{۲ \times ۵}$$

$$\frac{۳}{۴۰} = \frac{۳}{۲ \times ۲ \times ۲ \times ۵} = \frac{۲}{۲^۳ \times ۵}$$

$$\frac{۱۶}{۱۲۰} = \frac{۱}{۲۰} = \frac{۱}{۲^۲ \times ۵}$$

دسته دوم: اعداد اعشاری **متناوب** : مانند

$$۰/۲۷۲۷۲۷ \dots = ۰/\overline{۲۷}$$

$$۰/۲۳۵۱۳۵۱۳۵۱ = ۰/\overline{۲۳۵۱}$$

روش تشخیص اعداد گویای متناوب بدون تقسیم کردن صورت کسر بر مخرج

اگر يك كسر را تا جایی كه امکان دارد صورت و مخرج آن با هم ساده كنیم و مخرج كسر را به عاملهای اول تجزیه كنیم مخرج هیچ کدام از عاملهای ۲ یا ۵ را نداشته باشد یا اگر عامل های ۲ یا ۵ داشت عاملهای دیگری نیز داشته باشد در آن صورت آن عدد يك عدد گویای متناوب است

$$\frac{4}{15} = \frac{4}{3 \times 5} \quad , \quad \frac{13}{60} = \frac{13}{2 \times 2 \times 3 \times 5} \quad , \quad \frac{4}{7}$$

نکته: اعداد اعشاری كه نه مختوم هستند و نه متناوب جزء اعداد گنگ (اصم) به حساب می آیند. همچنین اعداد رادیکالی كه جذر دقیق ندارند جزء اعداد گنگ (اصم) به حساب می آیند.

$$\pi = 3/14159 \dots$$

$$0/10100100010000 \dots$$

$$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5},$$

۱-۱-۲ بازه

بازه (فاصله): به هر زیر مجموعه ی پیوسته از اعداد حقیقی يك بازه می گوییم.

مثال: A مجموعه شامل اعداد حقیقی بین -۲ و ۳ یعنی

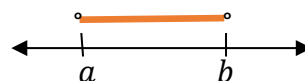
$$A = \{x \in R \mid -2 < X < 3\}$$



برای نشان دادن مجموعه A به زبان ساده تر (به صورت بازه) با نماد $(-۲, ۳)$ نمایش می دهیم.

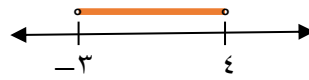
انواع بازه: اگر $a < b, a, b \in R$ آن گاه داریم (۱) **بازه های باز**

$$(a, b) = \{x \in R \mid a < x < b\}$$



الف) کراندار :

$(-۳, \xi) = \{x \in R \mid -۳ < x < \xi\}$



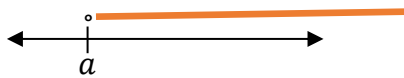
مثال

ب) بی کران:

$(a, +\infty) = \{x \in R \mid x > a\}$



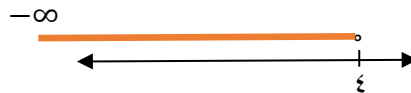
$(۳, +\infty) = \{x \in R \mid x > ۳\}$



$(-\infty, a) = \{x \in R \mid x < a\}$



$(-\infty, \xi) = \{x \in R \mid x < \xi\}$



۲) بازه ی بسته:

$[a, b] = \{x \in R \mid a \leq x \leq b\}$



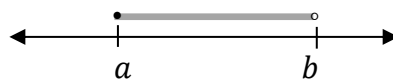
$[-۲, ۳] = \{x \in R \mid -۲ \leq x \leq ۳\}$



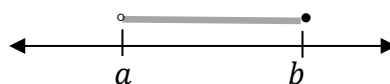
۳) بازه های نیم باز

الف) کراندار

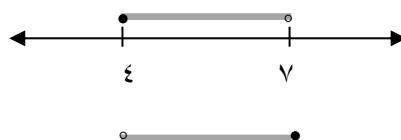
$[a, b) = \{x \in R \mid a \leq x < b\}$



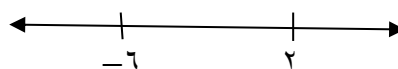
$(a, b] = \{x \in R \mid a < x \leq b\}$



$[\xi, \gamma) = \{x \in R \mid 4 \leq x < ۷\}$

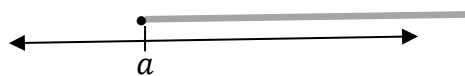


$(-۶, ۲] = \{x \in R \mid -۶ < x \leq ۲\}$

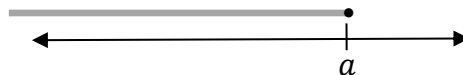


ب) بی کران

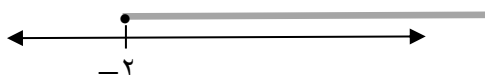
$[a, +\infty) = \{x \in R \mid x \geq a\}$



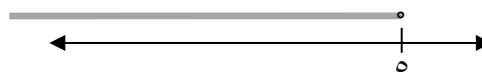
$(-\infty, a] = \{x \in R \mid x \leq a\}$



$[-۲, +\infty) = \{x \in R \mid x \geq -۲\}$

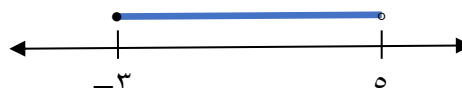


$(-\infty, ۰] = \{x \in R \mid x \leq ۰\}$

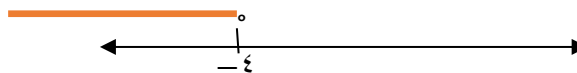


مثال: بازه های زیر را به صورت هندسی نمایش دهید:

$[-۳, ۰)$



$(-\infty, -۴)$



مثال: بازه های زیر را به صورت مجموعه نمایش دهید؟

$[-۱, +\infty) = \{x \in R \mid x \geq -۱\}$

$[-۴, -۱] = \{x \in R \mid -۴ \leq x \leq -۱\}$

مثال: درستی یا نادرستی عبارت های زیر را مشخص کنید:

الف) درست $-۱ \in (-۲, ۰)$

ب) نادرست $-۳ \in (-۳, ۱)$

پ) درست $۰ \in (-۱, ۰]$

ت) درست $\frac{۴}{۳} \in [\frac{۱}{۳}, ۲)$

ث) نادرست $-۱ \in \{-۲, ۱\}$

دقت کنیم در مجموعه؛ فقط اعداد داده شده عضو مجموعه هستند در قسمت ت ۱- عضو مجموعه نیست)
مجموعه را با بازه اشتباه نگیریم)

ج) درست $-1 \in [-2, 1)$

چ) درست $\pi \in (3, +\infty)$

ح) نادرست $\sqrt{3} \in (0, 1]$

خ) نادرست $[2, 5) \subseteq (2, 5]$

د) درست $6 / 0.22 \times 10^{23} \in (1, +\infty)$

ذ) درست $\sqrt{3} \in (-2, 3)$

ر) درست $(-1, 3) \subseteq [-1, 3)$

ز) نادرست $[-1, 3) \subseteq (-1, 3)$

س) درست $\{0, 1\} \subseteq [-1, 2)$

ش) نادرست $[-2, 3) \subseteq \{-4, 4\}$

نکته: تهی زیر مجموعه ی همه مجموعه هاست .

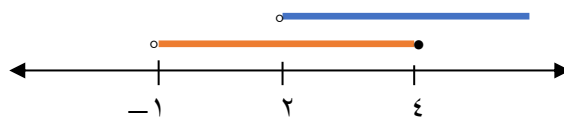
ژ) درست $\emptyset \subseteq [-10, 0)$

۱-۱-۳ اعمال روی بازه ها

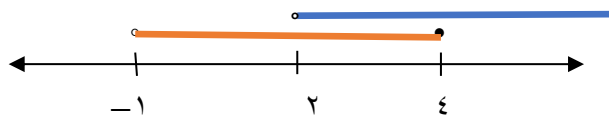
با توجه به مفهوم اجتماع، اشتراک و تفاضل در مجموعه ها می توان اجتماع ، اشتراک و تفاضل بازه ها را به دست آورد که بهتر است از نمایش هندسی (محور اعداد) استفاده کنیم به این صورت که نمایش هندسی هر دو بازه را روی یک محور رسم می کنیم و با توجه به شکل جواب را بدست می آوریم.

مثال:

$$(-1, 4] \cup (2, +\infty) = (-1, +\infty)$$



$$(-1, 4] \cap (2, +\infty) = (2, 4]$$



دقت کنیم چون $(2, +\infty) \notin 2$ پس در اشتراک قرار ندارد.

نکته: برای بدست آوردن **تفاضل** دو بازه مراحل زیر را انجام می دهیم

مرحله ۱) اشتراک دو بازه را به دست می آوریم.

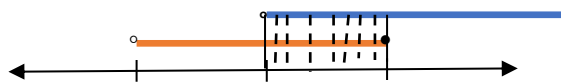
مرحله ۲) بازه ی اولی را روی محور رسم می کنیم و اشتراک را از آن حذف می کنیم

مرحله ۳) هر چه از مجموعه اول مانده است را به عنوان تفاضل در نظر می گیریم.

مثال:

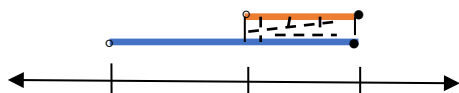
$$(-1, 3] - (1, +\infty)$$

مرحله ۱ اشتراک را بدست می آوریم.



$$(-1, 3] \cap (1, +\infty) = (1, 3]$$

مرحله ۲ بازه ی اولی یعنی $(-1, 3]$ را روی محور رسم می کنیم و اشتراک را از آن حذف می کنیم.



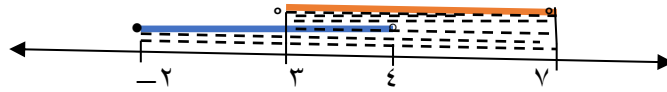
مرحله ۳ \Rightarrow



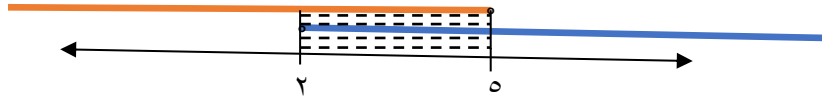
جواب نهایی: $(-1, 1]$

مثال: حاصل عبارت های زیر را بدست آورید.

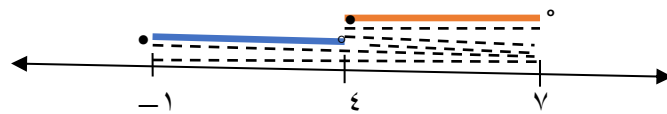
$$(-2, 4) \cup (3, 7) = [-2, 7) \text{ الف)}$$



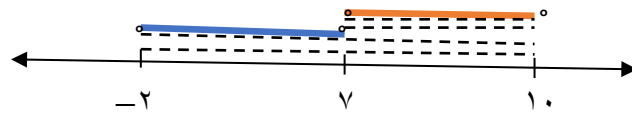
ب) $(2, +\infty) \cap (-\infty, 5) = (2, 5)$



پ) $[-1, 4] \cup [4, 7] = [-1, 7]$

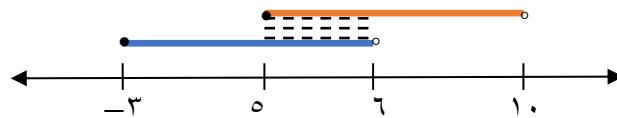


ت) $(-2, 7) \cup (7, 10] = (-2, 10] - \{7\}$



ث) $[-3, 6] - [5, 10]$

مرحله ۱



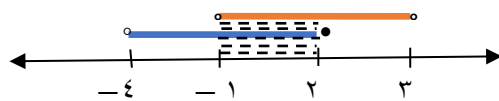
$[-3, 6] \cap (5, 10) = [5, 6]$

مرحله ۳



مثال: اگر $A = (-4, 2]$, $B = (-1, 3]$ باشند حاصل عبارت های زیر را بدست آورید.

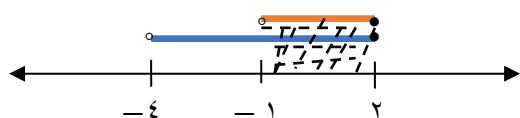
الف) $A - B =$



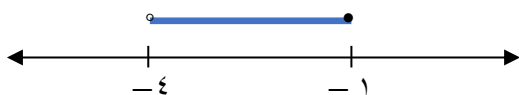
مرحله ۱ ابتدا اشتراک را بدست می آوریم.

$A \cap B = (-1, 2]$

مرحله ۲ بازه اولی یعنی A را روی محور رسم می کنیم و اشتراک را از آن حذف می کنیم.



مرحله ۲



مرحله ۳

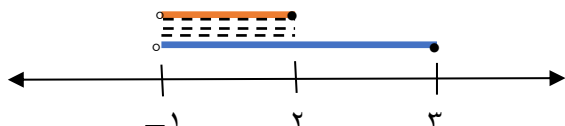
جواب نهایی : $(-4, -1]$

ب) $B - A =$

مرحله ۱ همانند قسمت الف

$B \cap A = (-1, 2]$

مرحله ۲ بازه ی اولی یعنی B را روی محور رسم می کنیم و اشتراک قسمت هاشور خورده را از آن حذف می کنیم.



مرحله ۳

جواب نهایی $(2, 3]$

نکته: گاهی اجتماع دو یا چند بازه را به صورت تفاضلی می توان نشان داد. $(a < b)$

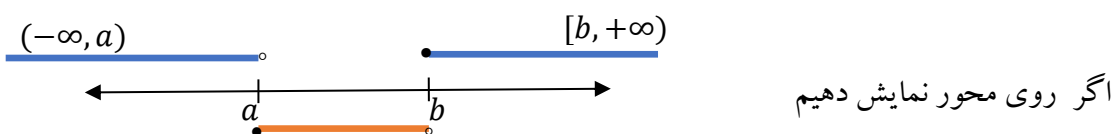
$$(-\infty, a) \cup (a, +\infty) = \left\langle \begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \\ | \\ a \end{array} \right\rangle = \{x \mid x < a \text{ یا } x > a\} = R - \{a\}$$

$$(-\infty, a) \cup [b, +\infty) = \left\langle \begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \quad \bullet \text{---} \\ | \quad | \\ a \quad b \end{array} \right\rangle = \{x \mid x < a \text{ یا } x \geq b\} = R - [a, b)$$

دقت کنیم برای نوشتن مجموعه $(-\infty, a) \cup [b, +\infty)$ به صورت تفاضل کافی است مجموعه ای را پیدا کنیم که اجتماع آن مجموعه با $(-\infty, a) \cup [b, +\infty)$ برابر R شود و آن مجموعه با مجموعه $(-\infty, a) \cup [b, +\infty)$ اشتراکی نداشته باشد.

در این جا داریم

$$(-\infty, a) \cup [b, +\infty) \cup \underbrace{[a, b]}_{\text{بازه ی مورد نظر}} = R \implies (-\infty, a) \cup [b, +\infty) = R - [a, b]$$



از کل اعداد حقیقی بایستی $[a, b)$ را برداریم که همون $R - [a, b)$ میشود.

تست: $[-1, 3) \cup (3, 5)$ برابر است با:

$$(-1, 5) \setminus \{3\} = (-1, 5) - \{3\} = (-1, 5) \setminus \{3\}$$

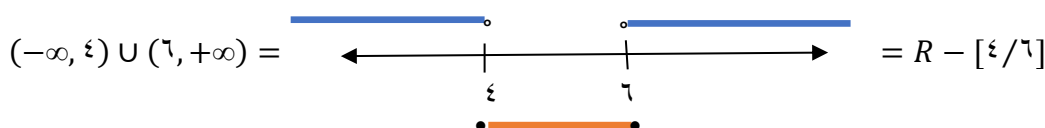
طبق محور گزینه ۳



تست: اجتماع بازه های $(-\infty, 4) \cup (6, +\infty)$ را به کدام صورت زیر می توان نوشت؟

$$R - (4, 6] \quad (4 \quad R - [4, 6) \quad (3 \quad R - [4, 6] \quad (2 \quad R - (4, 6) \quad (1$$

از آنجایی که $(-\infty, 4) \cup (6, +\infty) \cup [4/6] = R$ پس $(-\infty, 4) \cup (6, +\infty) = R - [4/6]$ به عبارتی



تست: کدام مجموعه ی زیر بیانگر $R - (-2, 1)$ است؟

$$\{x \in R \mid x \leq -2 \text{ و } x > 1\} \quad (2) \qquad \{x \in R \mid x < -2 \text{ و } x \geq 1\} \quad (1)$$

$$\{x \in R \mid x \leq -2 \text{ یا } x > 1\} \quad (4) \qquad \{x \in R \mid x < -2 \text{ یا } x \geq 1\} \quad (3)$$

نکته: کلمه «و» در مجموعه ها معادل اشتراک (\cap) و کلمه ی «یا» معادل (\cup) می باشد.

گزینه ۱ $(-\infty, -2) \cap [1, +\infty) = \emptyset$

گزینه ۲ $(-\infty, -2] \cap (1, +\infty) = \emptyset$

گزینه ۳ $(-\infty, -2) \cup [1, +\infty) = R - (-2, 1)$

گزینه ۴ $(-\infty, -2] \cup (1, +\infty) = R - (-2, 1)$

پس گزینه ۴ صحیح است.

تست: مجموعه $A = \{x \in R \mid x > -2 \text{ یا } x \leq 3\}$ برابر است با:

$$\emptyset \quad (4) \qquad R - [-2, 3) \quad (3) \qquad R \quad (2) \qquad (-2, 3] \quad (1)$$

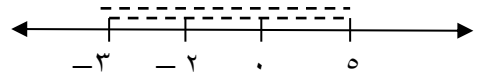
وقتی کلمه ی «یا» وجود دارد یعنی اجتماع بگیریم.

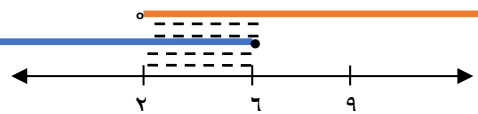
$$\{x \in R \mid x > -2 \text{ یا } x \leq 3\} = (-2, +\infty) \cup (-\infty, 3] = R$$

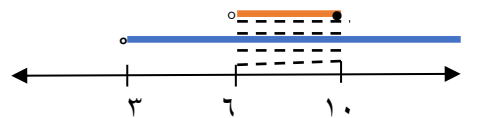
اگر اشتراک می خواست گزینه یک جواب درست بود.

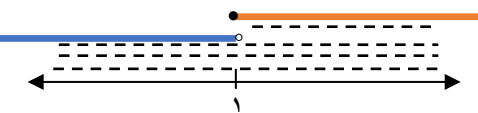
مثال: حاصل هر یک از مجموعه های زیر را با رسم بازه های آنها روی یک محور به دست آورید. (تمرین

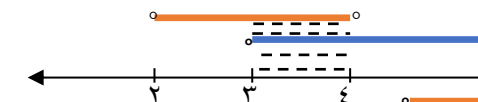
صفحه ۴ ریاضی دهم)

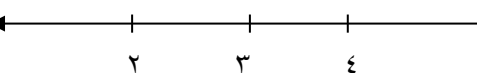
الف) $(-3, 0) \cup (-2, 5) =$  $= (-3, 5)$

ب) $(-\infty, 6] \cap (2, 9) =$  $= (2, 6]$

پ) $(3, +\infty) \cap (6, 10] =$  $= (6, 10]$

ت) $(-\infty, 1) \cup [1, +\infty) =$  $= R = (-\infty, +\infty)$

ث) $(3, +\infty) - [2, 4) =$  $= [4, +\infty)$

ج) $[2, 4) - (3, +\infty) =$  $= [2, 3]$

مثال: مجموعه ی $\{3\} - R$ را روی محور نمایش دهید و سپس آن را به صورت اجتماع دو بازه بنویسید.

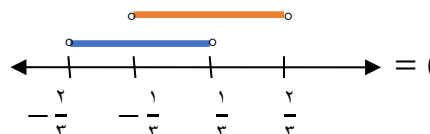
(تمرین ۵ صفحه ریاضی پایه دهم)

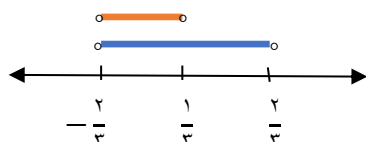
 $= (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$

تست: اگر $A_n = (-\frac{2}{n}, \frac{n-2}{n})$ به صورت بازه باشد، مجموعه ی $(A_7 \cup A_1) - A_7$ برابر کدام بازه است.

$(-\frac{1}{7}, \frac{2}{7})$ (۱) $[-\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ (۲) $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ (۳) $(\frac{1}{7}, \frac{2}{7})$ (۴)

$A_7 = (-\frac{2}{7}, \frac{2}{7}) = (-\frac{1}{7}, \frac{1}{7})$
 $A_1 = (-\frac{2}{1}, \frac{1-2}{1}) = (-\frac{2}{1}, -\frac{1}{1})$

$\Rightarrow A_7 \cup A_1 =$  $= (-\frac{2}{1}, \frac{1}{7})$

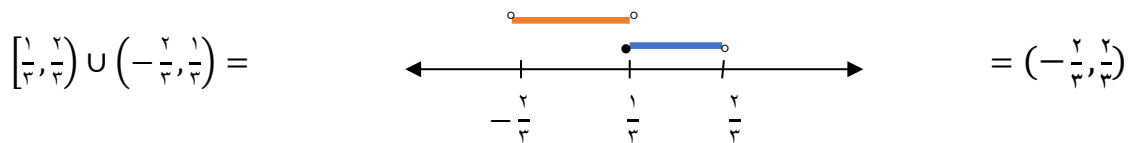
$(A_7 \cup A_1) - A_7 = (-\frac{2}{1}, \frac{1}{7}) - (-\frac{2}{7}, \frac{1}{7})$  $= [-\frac{2}{7}, \frac{1}{7})$

به دو دلیل زیر می توان اثبات کرد که $\frac{1}{3}$ باید بسته باشد

اول: چون در $\frac{1}{3}$ علامت بازه باز است پس $\frac{1}{3}$ برداشته نمی شود.

دوم: برای اینکه مطمئن شویم از جواب نهایی و عبارتی که برداشتیم (کم کردیم)

اجتماع بگیریم بازه ی اولیه حاصل شود در اینجا داریم



تست: اگر عدد ۵ در بازه ی $(۲x + ۹, ۳x - ۱]$ باشد بزرگترین بازه ای که x می تواند اختیار کند کدام است؟

$$(-۲, ۲] \quad (۱) \quad (-۲, ۳] \quad (۲) \quad (-۲, ۳] \quad (۳) \quad (-۲, ۳] \quad (۴)$$

حل) چون عدد ۵ در بازه ی $(۲x + ۹, ۳x - ۱]$ قرار دارد، پس $۳x - ۱ \leq ۵ < ۲x + ۹$ بنابراین

$$\left\{ \begin{array}{l} ۳x - ۱ \leq ۵ \rightarrow ۳x \leq ۶ \rightarrow x \leq ۲ \\ ۵ < ۲x + ۹ \rightarrow ۵ - ۹ < ۲x \rightarrow -۴ < ۲x \rightarrow -۲ < x \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{اشتراک بین جواب ها}} \text{Number line diagram showing the intersection of } x \leq 2 \text{ and } x > -2 \text{, resulting in the interval } (-2, 2].$$

جواب = $(-۲, ۲]$

تمرین: حدود مقادیر m را چنان بیابید که بازه ی $(m - ۱, m + ۵)$ شامل عدد ۱ باشد.

مثال: اگر نقطه ی میانی بازه ی $[۵m - ۱, ۲m + ۷]$ برابر ۳ باشد، مقدار m و طول بازه ی مذکور را تعیین کنید.

نکته: نقطه ی میانی بازه $[a, b]$ برابر است با $\frac{a+b}{۲}$

طول بازه ی $[a, b]$ برابر است با $b - a$

$$\text{نقطه میانی} = \frac{5m - 1 + 2m + 7}{2} = 3 \rightarrow \frac{7m + 6}{2} = 3 \rightarrow 7m + 6 = 6 \rightarrow 7m = 0 \rightarrow m = 0$$

$$m = 0 \rightarrow [5(0) - 1, 2(0) + 7] = [-1, 7] \rightarrow \text{طول بازه} = 7 - (-1) = 8$$

تمرین: اگر $A = \{x \in R \mid x \geq 1\}$, $B = \{x \in R \mid -2 < x < 3\}$, $C = \{x \in R \mid 1 < x \leq 2\}$ بازه هایی را که با مجموعه های زیر تعریف شده اند مشخص کنید.

الف) $A \cap B$

ب) $A \cup B$

پ) $C - B$

ت) $(A \cap B) \cup C$

ث) $(A \cap B) \cup (B \cap C)$

تمرین: نامعادلات زیر را حل کرده و مجموعه جواب را بصورت بازه و روی محور نشان دهید.

۱) $2x + 5 \leq 8x - 1$

۲) $-2 \leq 8x - 3 \leq 5$

۳) $-3 \leq 1 - 2x < 3$

۴) $\frac{1-x}{2} < -2$

۵) $-1 < \frac{x-5}{2} \leq 3$

۶) $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + x + 5 \leq 3(x + 1)$

۷) $-3 \leq x + 7 \leq 3x - 2$

۸) $-3 < 3x - 5 < x - 2$

۱-۱-۴ مجموعه های متناهی و نامتناهی

فرض کنید A مجموعه ی اعداد طبیعی کمتر از ۴ و B مجموعه ی اعداد صحیح کمتر از ۴ باشد.

الف) این دو مجموعه را با نمایش اعضای آنها مشخص کنید.

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$B = \{\dots, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

ب) A چند عضو دارد؟ ۳ عضو

پ) درباره ی تعداد اعضای B چه می توان گفت؟ تعداد اعضا مشخص نیست (بیشمار عضو دارد)

مجموعه هایی مانند A را که تعداد اعضای آنها یک عدد حسابی است، **مجموعه های متناهی** می نامیم.

با توجه به مطلب فوق، B یک مجموعه ی متناهی نیست؛ زیرا (نمی توان تعداد اعضای آن را با یک عدد

بیان کرد. در واقع تعداد اعضای این مجموعه از هر عددی که در نظر بگیریم، بزرگ تر است. چنین مجموعه

هایی را **مجموعه های نامتناهی** می نامیم.

مثال: متناهی یا نامتناهی بودن هر یک از مجموعه های زیر را مشخص کنید. درباره ی مجموعه های متناهی

سعی کنید تعداد دقیق یا تقریبی اعضای هر یک از آنها را بنویسید.

تعداد اعضا (در مورد مجموعه های متناهی)	متناهی	نامتناهی	مجموعه
۴ عضو {۲,۳,۵,۷}	*		مجموعه اعداد اول یک رقمی
	*		مجموعه انسان های روی زمین
		*	مجموعه اعداد طبیعی فرد
	*		مجموعه سلول های عصبی مغز یک انسان
		*	مجموعه تمام دایره های به مرکز مبدأ مختصات
	*		مجموعه دانش آموزان مدرسه ی شما
	*		مجموعه اعداد طبیعی ده رقمی
۳۹۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰	*		مجموعه درخت های جنگل های آمازون
		*	مجموعه کسرهای مثبت با صورت یک
		*	مجموعه مضرب های طبیعی عدد ۱۰
		*	بازه (۰,۱)
	*		مجموعه مولکول های موجود در یک مول مشخص از آب

مثال: دو مجموعه ی متناهی نام ببرید. مجموعه ی دیران ریاضی اهواز- مجموعه ی ماشین های موجود در

یک نمایشگاه

مثال: دو مجموعه ی نامتناهی مثال بزنید که یکی از آنها زیر مجموعه ی دیگری باشد. مجموعه ی اعداد

طبیعی که زیر مجموعه ی مجموعه اعداد حسابی است. یا دو بازه ی $[0,1)$, $(-3,7)$ که $(-3,7) \subseteq [0,1)$

یا مجموعه ی دایره های به مرکز مبدأ مختصات با شعاع عدد صحیح که زیر مجموعه ی مجموعه ی تمام

دایره هایی به مرکز مبدأ مختصات است.

مثال: دو مجموعه ی نامتناهی مثل A و B مثال بزنید که $A \subseteq B$ بوده و $B-A$ تک عضوی باشد.

تذکر: (تعداد اعضای برخی از مجموعه های متناهی ممکن است بسیار زیاد باشد؛ با این حال با داشتن

امکانات لازم و صرف وقت کافی ممکن است بتوان تعداد آنها را بدست آورد)

تک عضو

$$W \text{ و } N \text{ که هر دو نامتناهی اند و } N \subseteq W, W - N = \{0\}$$

یا

$$\text{دو بازه ی } [1,2), [1,2) \text{ که } [1,2) \subseteq [1,2), [1,2) - [1,2) = \{1\}$$

فعالیت: الف) $\frac{1}{4}$ عددی بین ۰ و ۱ است. چهار عدد گویای دیگر از بازه ی $(0,1)$ بنویسید. $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{4}{7}, \frac{1}{1000}$

ب آیا می توان بین ۰ و ۱ به هر تعداد دلخواه عدد گویا ارائه کرد؟ بله

پ در مورد متناهی یا نامتناهی بودن اعداد گویای موجود در بازه $(0, 1)$ چه نتیجه ای می گیرید؟ نامتناهی اند

ت در مورد متناهی یا متناهی بودن Q چه می توان گفت؟ نامتناهی

ث اگر A دارای یک زیر مجموعه ی نامتناهی باشد، آنگاه A یک مجموعه نامتناهی خواهد بود.

مثال: فرض کنید U مجموعه ی تمام مضرب های طبیعی عدد ۵ باشد.

$$U = \{5, 10, 15, 20, 25, 30, \dots\}$$

الف) U را با نمایش اعضای آن بنویسید.

ب) U متناهی است یا نامتناهی؟ نامتناهی

پ) یک زیر مجموعه ی متناهی از U بنویسید. $\{5, 10, 15, 20, 25\}$ = مضرب طبیعی ۵ کوچکتر از ۳۰

ت) دو زیر مجموعه ی نامتناهی مانند C و D از U بنویسید؛ به طوری که $C \subseteq D$.

$$D = \{10, 20, 30, 40, \dots\} \text{ مضرب } 10 \text{ و } C = \{20, 40, 60, 80, \dots\} \text{ مضرب } 20$$

مثال: متناهی یا نامتناهی بودن مجموعه های زیر را مشخص کنید.

الف) مجموعه اعداد طبیعی. نامتناهی

ب) مجموعه شمارنده های طبیعی عدد ۳۶. متناهی

پ) بازه $(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$. نامتناهی

ت) $A = \{x \in N \mid 1 < x < 2\}$ متناهی (چون با توجه به مجموعه ی N ، می شود \emptyset)

ث) مجموعه ی مضرب های طبیعی عدد ۱۰۰. نامتناهی

مثال: دو مجموعه ی نامتناهی مثال بزنید که اشتراک آنها مجموعه ای متناهی باشد. $[2,5]$ و $[-3,2]$ که اشتراک آنها مجموعه ی $\{2\}$ است که متناهی است.

مثال: اگر $A \subseteq B$ و B مجموعه ای متناهی باشد، آنگاه A متناهی خواهد بود یا نامتناهی؟ متناهی

تمرین: اعضای هر یک از مجموعه های زیر را نشان دهید، سپس مجموعه های با پایان و بی پایان (نامتناهی) را مشخص کنید.

(۱) مجموعه اعداد طبیعی فرد

(۲) مجموعه اعداد طبیعی زوج کوچکتر از ۲۰

(۳) مجموعه اعداد زوج

(۴) مجموعه اعداد صحیح کوچکتر از ۱۳۹۶

(۵) مجموعه اعداد طبیعی بزرگتر از ۱۰ و کوچکتر از ۲۰

(۶) مجموعه اعداد صحیح بین ۶- و ۲-

(۷) $A = \{x \in Z \mid -1 \leq x \leq 4\}$

(۸) $B = \{x \in N \mid x > 2016\}$

(۹) $C = \{2, 4, 8, \dots, 2^{1234}\}$

(۱۰) $D = \{x \in Z \mid \frac{1}{x} \in Z\}$

درس دوم : متمم يك مجموعه

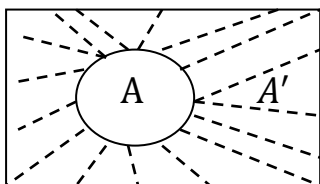
۱-۲-۱ مجموعه مرجع

تعريف مجموعه مرجع: در هر مبحث، مجموعه ای را که همه ی مجموعه های مورد بحث، زیر مجموعه آن باشند، مجموعه مرجع می نامیم و با U نشان می دهیم.

۱-۲-۲ متمم يك مجموعه

تعريف متمم يك مجموعه: هرگاه U مجموعه مرجع باشد و $A \subseteq U$ آنگاه مجموعه ی $U - A$ را متمم A

می نامیم و با نماد A' نشان می دهیم.

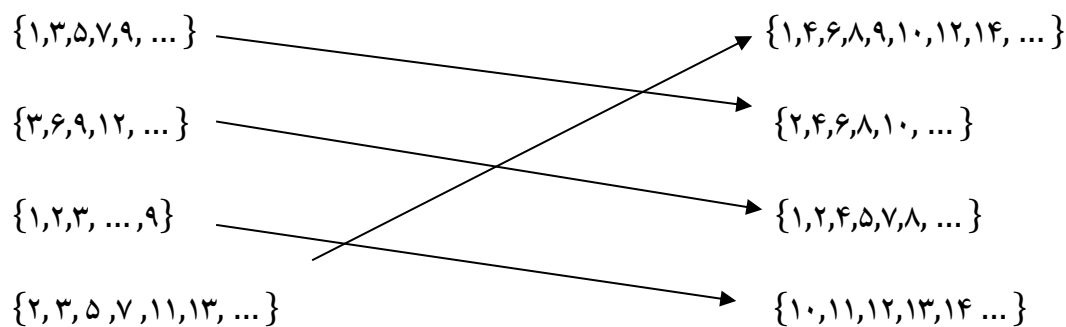


به عبارت دیگر A' شامل عضوهایی از U است که در A نیستند.

مثال: فرض کنیم $U = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$, $A = \{2, 4, 5, 6\}$ باشد A' را مشخص کنیم.

$$A' = U - A = \{1, 2, 3, \dots, 10\} - \{2, 4, 5, 6\} = \{1, 3, 7, 8, 9, 10\}$$

مثال: با فرض آنکه N مجموعه مرجع باشد هر مجموعه را به متمم خودش وصل کنید.



مثال: N را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیرید.

الف) مجموعه ای نامتناهی مثل A مثال بزیند که A' نامتناهی باشد. A: مجموعه ی اعداد طبیعی زوج
A': مجموعه ی اعداد طبیعی فرد

ب) مجموعه ای نامتناهی مثل B مثال بزیند که B' متناهی باشد.

نامتناهی B = {۵, ۶, ۷, ۸, ...} مجموعه ی اعداد طبیعی بزرگتر از ۴

متناهی B' = {۱, ۲, ۳, ۴} مجموعه ی اعداد طبیعی کوچکتر یا مساوی ۴

پ) مجموعه ای متناهی مثل C مثال بزیند و C' را به دست آورید. C' متناهی است یا نامتناهی؟

متناهی → اعداد اول طبیعی یک رقمی C = {۲, ۳, ۵, ۷}

نامتناهی → C' = {۱, ۴, ۶, ۸, ۹, ...}

مثال: اگر مجموعه ی مرجع را Z در نظر بگیریم و A = {x ∈ Z | -۳ < x ≤ ۲} باشد A' را مشخص

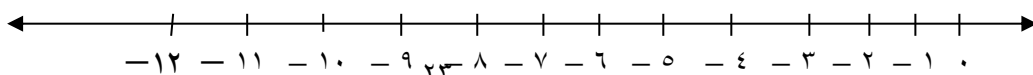
کنید. A = {-۲, -۱, ۰, ۱, ۲}

$$A' = Z - A = {..., -۳, -۲, -۱, ۰, ۱, ۲, ۳} - \{-۲, -۱, ۰, ۱, ۲\} = {..., -۴, -۳, ۳, ۴, ...}$$

مثال: اگر Z را به عنوان مجموعه ی مرجع در نظر بگیریم، آنگاه N' را با نوشتن اعضای آن مشخص کنید.

$$N' = Z - N = {..., -۳, -۲, -۱, ۰, ۱, ۲, ۳, ...} - \{۱, ۲, ۳, ...\} = {..., -۳, -۲, -۱, ۰}$$

مثال: اگر U = {x ∈ Z | x < -۳}, A = {x ∈ Z | x ≤ -۱۰} باشد A' را مشخص کنید.



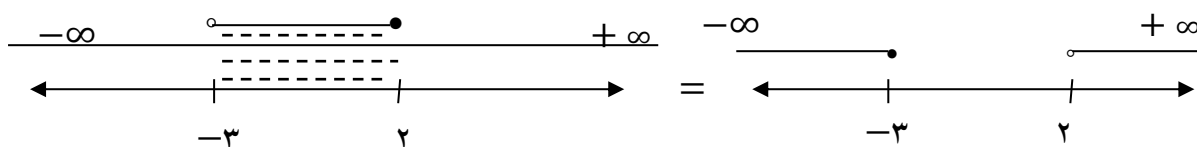
$$U = \{-4, -5, -6, \dots\}$$

$$A = \{-10, -11, -12, \dots\}$$

$$A' = U - A = \{-4, -5, -6, -7, -8, -9\}$$

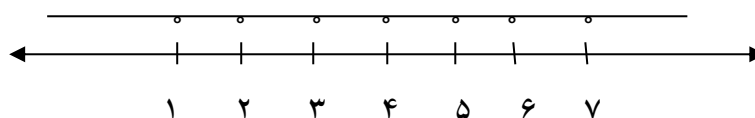
مثال: اگر مجموعه Y مرجع را R در نظر بگیریم و $B = \{x \in R \mid -3 < x \leq 2\}$ باشد B' را مشخص کنید و آن را روی محور اعداد نمایش دهید.

$$B' = R - B = (-\infty, +\infty) - (-3, +2] = (-\infty, -3] \cup (2, +\infty)$$



مثال: اگر R به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیریم در این صورت N' را روی محور نمایش دهید؟

$$N' = R - N$$



تمرین: R را به عنوان مجموعه Y مرجع در نظر بگیرید و سپس متمم هر یک از مجموعه های زیر را روی محور نشان دهید.

الف) $C = (0, +\infty)$

ب) $D = (-\infty, 1]$

مثال: اگر U مجموعه ی شمارنده های ۳۰ و A مجموعه شمارنده های ۶ باشد، حاصل عبارت های زیر را بدست آورید.

الف) A' ب) $(A')'$ پ) \emptyset'

ت) U' ث) $A \cup A'$ ج) $A \cap A'$

الف)

$$U = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$$

$$A = \{1, 2, 3, 6\}$$

$$A' = U - A = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\} - \{1, 2, 3, 6\} = \{5, 10, 15, 30\}$$

ب)

$$(A')' = U - A' = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\} - \{5, 10, 15, 30\} = \{1, 2, 3, 6\} = A \Rightarrow (A')' = A$$

پ)

$$\emptyset' = U - \emptyset = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\} - \{\} = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\} = U \Rightarrow \emptyset' = U$$

ت)

$$U' = U - U = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\} - \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\} = \{\} \Rightarrow U' = \emptyset$$

(ث)

$$A \cup A' = \{1,2,3,6\} \cup \{5,10,15,30\} = \{1,2,3,5,6,15,30\} = U \Rightarrow \boxed{A \cup A' = U}$$

(ج)

$$A \cap A' = \{1,2,3,6\} \cap \{5,10,15,30\} = \emptyset \Rightarrow \boxed{A \cap A' = \emptyset}$$

مثال: فرض کنیم $U = \{1,2,3,4,5\}$, $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,4\}$ سپس حاصل عبارت های زیر را بدست

آورید؟

الف) $(A \cup B) = ?$

$$A \cup B = \{1,2,3\} \cup \{2,4\} = \{1,2,3,4\}$$

ب) $(A \cup B)' = ?$

$$(A \cup B)' = U - (A \cup B) = \{1,2,3,4,5\} - \{1,2,3,4\} = \{5\}$$

پ) $A' \cap B' = ?$

$$A' = \{4,5\}, B' = \{1,3,5\}$$

$$A' \cap B' = \{4,5\} \cap \{1,3,5\} = \{5\}$$

از قسمت ب و پ چه نتیجه ای می گیرید؟ با هم برابرند یعنی

$$\boxed{(A \cup B)' = A' \cap B'}$$
 قانون دمورگان

ت) $A \cap B = ?$

$$A \cap B = \{1,2,3\} \cap \{2,4\} = \{2\}$$

(A ∩ B)' =? (ث)

$$(A \cap B)' = U - (A \cap B) = \{1,2,3,4,5\} - \{2\} = \{1,3,4,5\}$$

A' ∪ B' =? (ج)

$$A' \cup B' = \{4,5\} \cup \{1,3,5\} = \{1,3,4,5\}$$

از قسمت ث و ج چه نتیجه ای می گیرید؟ با هم برابرند

$(A \cap B)' = A' \cup B'$ قانون دمورگان

A - B =? (چ)

$$A - B = \{1,2,3\} - \{2,4\} = \{1,3\}$$

A - (A ∩ B) =? (ح)

$$A - (A \cap B) = \{1,2,3\} - \{2\} = \{1,3\}$$

از قسمت های چ و ح چه نتیجه ای می گیرید؟ با هم برابرند

$A - B = A - (A \cap B)$ → به طور کلی $\square - \triangle = \square - (\square \cap \triangle)$

A ∩ B' =? (خ)

$$A \cap B' = \{1,2,3\} \cap \{1,3,5\} = \{1,3\}$$

از قسمت چ و خ چه نتیجه ای می گیرید؟ با هم برابرند.

$A - B = A \cap B'$ → در حالت کلی $\square - \triangle = \square \cap \triangle'$

مثال: الف) اگر $U = \{a, b, c, d, e\}$ مجموعه ی مرجع باشد و $A = \{a, b\}$ و $B = \{a, b, c\}$ در این صورت $A \subseteq B$ می باشد. با به دست آوردن A' و B' نشان دهید که بین A' و B' هم رابطه ی زیر مجموعه بودن برقرار است.

$$\begin{aligned} A' &= U - A = \{c, d, e\} \\ B' &= U - B = \{d, e\} \end{aligned} \Rightarrow B' \subseteq A'$$

ویژگی های مجموعه مرجع و متمم در یک نگاه

۱) $(A')' = A$

۲) $\emptyset' = U$

۳) $U' = \emptyset$

۴) $A \cup A' = U$

۵) $A \cap A' = \emptyset$

۶) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

۷) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

۸) $A - B = A - (A \cap B)$

۹) $A - B = A \cap B'$

۱۰) $A \subseteq B \Rightarrow B' \subseteq A'$

۱-۲-۳ تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه

اگر A یک مجموعه متناهی باشد، آنگاه برای نشان دادن تعداد عضوهای آن از علامت $n(A)$ استفاده می شود) مثلاً اگر $G = \{۲, ۳, ۵, ۷\}$ در این صورت می توانیم بنویسیم $n(G) = ۴$. در این بخش می خواهیم رابطه ای برای $n(A \cup B)$ به دست آوریم.

فعالیت: یک تیم کوه نوردی متشکل از ۴ دانش آموز و ۳ دانشجوی عضو یک موسسه طرفدار محیط زیست است. اعضای این تیم به طور داوطلبانه در روزهای جمعه ی هر هفته کوه های اطراف شهر خود را از وجود زباله پاک سازی می کنند.

اعضای دانش آموز این تیم مجموعه $\{، آنیتا ، زهرا ، الناز الهام\}$ و اعضای دانشجوی آن مجموعه $B = \{، فاطمه ، معصومه فرزانه\}$ هستند. همان گونه که دیده می شود، این دو مجموعه هیچ عضو مشترکی ندارند؛ به عبارت دیگر $A \cap B = \emptyset$.

به هر دو مجموعه مثل A و B که فاقد عضو مشترک باشند، دو مجموعه ی جدا از هم یا مجزا می گوییم.

$$A \cap B = \emptyset$$

الف) اعضای $A \cup B$ را که بیانگر اعضای تیم کوه نوردی می باشد، بنویسید و جدول زیر را تکمیل کنید.

$$A \cup B = \{ \text{فرزانه ، معصومه ، فاطمه ، الهام ، الناز ، زهرا ، آنتیا} \}$$

$n(A)$	$n(B)$	$n(A \cup B)$	$n(A \cap B)$
۴	۳	۷	۰

ب) تعداد عضوهای $A \cup B$ چه رابطه ای با $n(A)$ و $n(B)$ دارد؟ جمع تعداد عضوهای A و B با هم، برابر تعداد عضوهای $A \cup B$ است این رابطه را به صورت یک فرمول بنویسید.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

پ) تحت چه شرایطی این فرمول برای دو مجموعه دلخواه A و B برقرار است؟ با شرط این که دو مجموعه اشتراکی نداشته باشند یعنی $A \cap B = \emptyset$ (جدا از هم)

فعالیت: الف) مجموعه ی شمارنده های طبیعی دو عدد ۲۸ و ۳۰ را به ترتیب A و B می نامیم. موارد خواسته شده را بنویسید.

$$A = \{1, 2, 4, 7, 14, 28\} \Rightarrow n(A) = 6$$

$$B = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\} \Rightarrow n(B) = 8$$

$$A \cap B = \{1, 2\} \Rightarrow n(A \cap B) = 2$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 14, 15, 28, 30\} \Rightarrow n(A \cup B) = 12$$

ب) جدول زیر را کامل کنید.

$n(A)$	$n(B)$	$n(A \cap B)$	$n(A \cup B)$
۶	۸	۲	۱۲

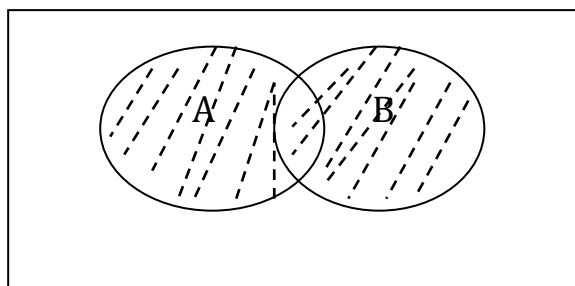
ب) چرا رابطه ای را که در مثال قبل به دست آوردید؛ یعنی $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ در این مثال

برقرار نیست؟ چون مجموعه های A و B عضوهای مشترک دارند، یعنی $A \cap B \neq \emptyset$

با توجه به جدول بالا داریم $۶ + ۸ - ۲ = ۱۲$

یعنی اگر A و B دو مجموعه متناهی دلخواه باشند، داریم:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$



$(A \cup B)$ حداقل یکی رخ دهد

مثال: فرض کنیم A و B زیر مجموعه هایی از مجموعه U باشند، به طوری که

$$n(A \cap B) = ۲۰ \text{ و } n(B) = ۴۰, n(A) = ۶۰, n(U) = ۱۰۰ \text{ مطلوب است، } n(A \cup B)$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cup B) = ۶۰ + ۴۰ - ۲۰$$

$$\Rightarrow n(A \cup B) = ۸۰$$

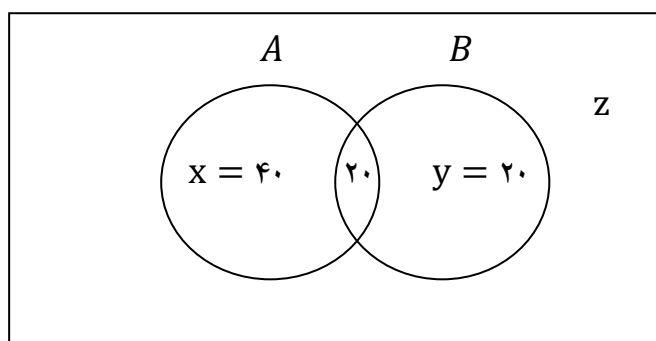
ب) روش دوم: به کمک نمودار ون

ابتدا اشتراك را می نویسیم

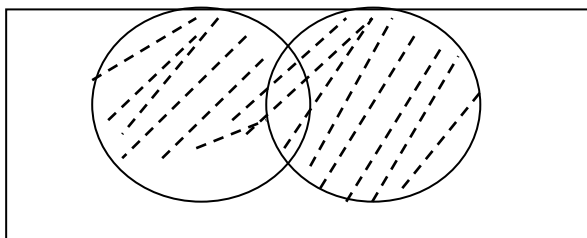
چون $n(A) = ۶۰$ پس $x = ۴۰$ چون $n(B) = ۴۰$ پس $y = ۲۰$

و چون $U = ۱۰۰$ پس $Z = ۲۰$

$$U = ۱۰۰$$



$$n(A \cup B) = ۴۰ + ۲۰ + ۲۰ = ۸۰$$



مثال: اگر $n(A) = ۱۵$ ، $n(A \cap B) = ۵$ و $n(A \cup B) = ۳۰$ آنگاه $n(B)$ را محاسبه کنید.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow ۳۰ = ۱۵ + n(B) - ۵ \Rightarrow n(B)$$

$$= ۳۰ - ۱۰ = ۲۰ \Rightarrow n(B) = ۲۰$$

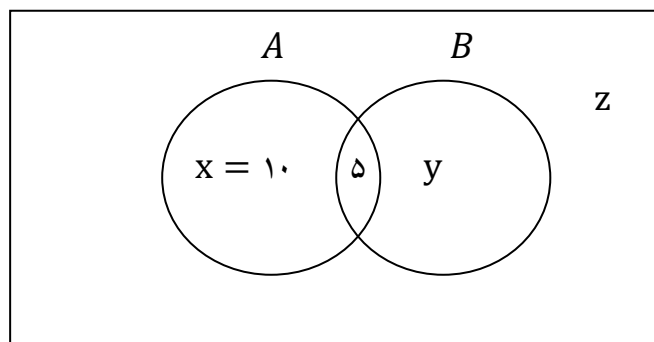
روش دوم: به کمک نمودار ون

دقت کنیم زمانیکه از نمودار ون استفاده می کنیم ابتدا اشتراك را می نویسیم.

تذکر: اگر اشتراک را به ما نداده بود آن را x می گیریم و در قسمت مربوط به اشتراک می نویسیم.

چون $n(A) = ۱۵$ پس $x = ۱۰$ از طرفی چون $(A \cup B) = ۳۰$ ، پس $y = ۱۵$

پس $n(B) = ۱۵ + ۵ = ۲۰$



نکته: مشخصه های اجتماع در سوال کلمات ؛ **یا - حداقل (لا اقل - دست کم)** می باشند.

نکته : هر وقت در سوال گفته بود A و B یعنی $(A \cap B)$

نکته : هر وقت در سوال گفته بود **هر دو** یعنی از اشتراک استفاده کنیم.

$$n(U)$$

مثال: يك دوره جشنواره ی فیلم کوتاه با شرکت ۲۱ فیلم در موضوعات مختلف در حال برگزاری است که

$$n(C \cap T)$$

$$n(T)$$

$$n(C)$$

در بین آنها ۷ فیلم پویانمایی (کارتونی) و ۸ فیلم طنز وجود دارد، به طوری که ۳ تا از فیلم های

پویانمایی با مضمون طنز می باشند و مطلوب است تعداد کل فیلم هایی که، پویانمایی یا طنز ند؟

روش اول حل: مجموعه ی شامل تمام فیلم ها را با U، مجموعه فیلم های پویانمایی را با C و مجموعه فیلم های

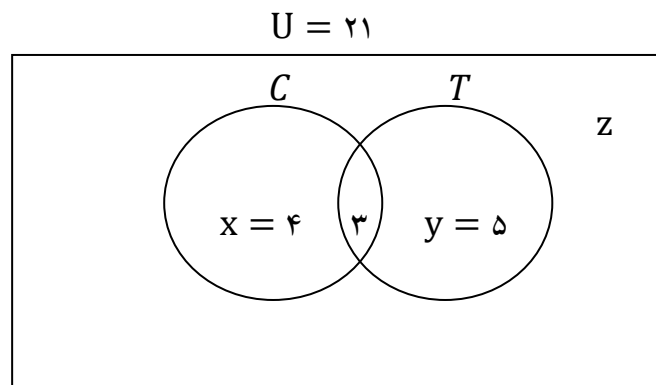
طنز را با T نشان می دهیم.

چون کلمه یا به کار رفته پس از اجتماع استفاده می کنیم.

$$n(C \cup T) = n(C) + n(T) - n(C \cap T) = 7 + 8 - 3 = 12$$

روش دوم: طبق نمودار ون ابتدا اگر اشتراك را داده بود اشتراك را می نویسیم و با توجه به سوال نمودار ون را

کامل می کنیم و به سوال پاسخ می دهیم.



چون $n(C) = 7$ پس $x = 4$ چون $n(T) = 8$ ، پس $y = 5$

و چون $U = 21$ پس $Z = 9$

$$= 4 + 3 + 5 = 12 \text{ پویانمایی یا طنز}$$

۱-۲-۴ تعداد عضوهای متمم يك مجموعه

با توجه به رابطه ی $A' = U - A$ می توان گفت

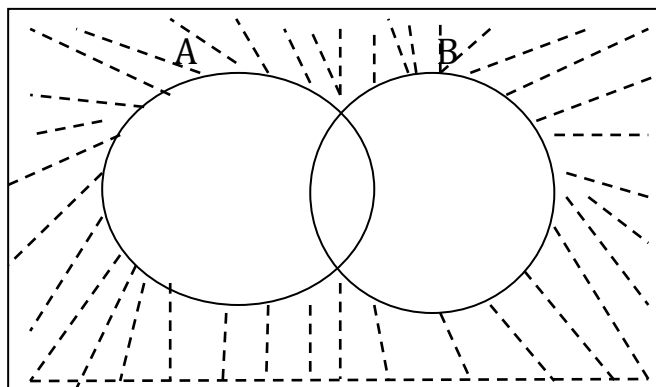
$$n(A') = n(U) - n(A) \xrightarrow{\text{در حالت کلی}} n(\square)' = n(U) - n(\square)$$

حالت خاص: **هیچکدام** رخ ندهند. یعنی نه A رخ دهد و نه B یعنی $(A' \cap B')$

با توجه به قانون دمورگان $A' \cap B' = (A \cup B)'$ اشتراک متمم ها را به اجتماع تبدیل می کنیم (چون برای

اجتماع فرمول داریم)

U



هیچکدام رخ ندهند

$$\underbrace{n(A' \cap B')}_{\text{طبق قانون مورگان}} = \underbrace{n(A \cup B)'}_{\text{طبق قانون متمم}} = n(U) - (A \cup B)$$

$$(A \cup B)' = A' \cap B' \rightarrow \text{قانون دمورگان}$$

$$A' = U - A \rightarrow \text{قانون متمم}$$

نکته: مشخصه های متمم در سوال کلمات منفی مانند **نه - هیچکدام** می باشند.

نکته: برای حل سوالات مربوط به متمم آنها را به روش غیرمستقیم حل می کنیم یعنی به اجتماع یا تفاضل

تبدیل می کنیم

مثال: فرض کنیم A و B زیر مجموعه هایی از مجموعه U باشند، به طوری که

$$n(A \cap B) = 20, n(U) = 100, n(A) = 60, n(B) = 40 \text{ و } n(A' \cap B')$$

جواب درپایین

$$n(A' \cap B') = n(A \cup B)' = n(U) - \overbrace{n(A \cup B)} = 100 - 80 = 20$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cup B) = 60 + 40 - 20$$

$$\Rightarrow n(A \cup B) = 80$$

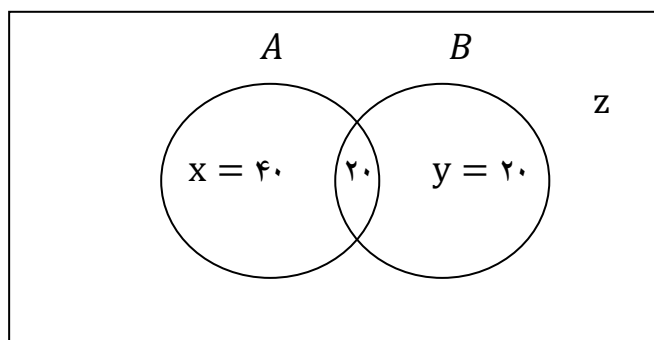
روش دوم: به کمک نمودار ون

ابتدا اشتراک را می نویسیم

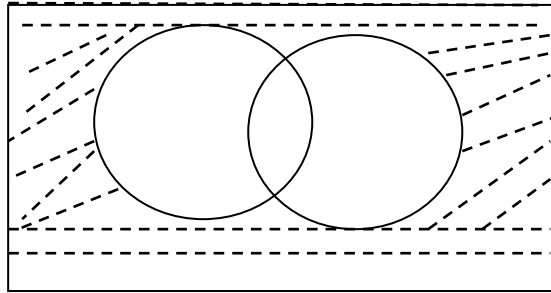
$$\text{چون } n(A) = 60 \text{ پس } x = 40 \text{ چون } n(B) = 40, \text{ پس } y = 20$$

$$\text{و چون } U = 100 \text{ پس } Z = 20$$

$$U = 100$$



$$n(A' \cap B') = Z = ۲۰$$



مثال: يك دوره جشنواره ی فیلم کوتاه با شرکت ۲۱ فیلم در موضوعات مختلف در حال برگزاری است که

در بین آنها ۷ فیلم پویانمایی (کارتونی) و ۸ فیلم طنز وجود دارد، به طوری که ۳ تا از فیلم های

پویانمایی با مضمون طنز می باشند و مطلوب است تعداد کل فیلم هایی که، غیر پویانمایی و غیر طنزند.

روش اول حل: مجموعه ی شامل تمام فیلم ها را با U، مجموعه فیلم های پویانمایی را با C و مجموعه فیلم های طنز را با T نشان می دهیم.

$$C' = \text{غیر پویانمایی} \rightarrow C = \text{پویانمایی}$$

$$T' = \text{غیر طنز} \rightarrow T = \text{طنز}$$

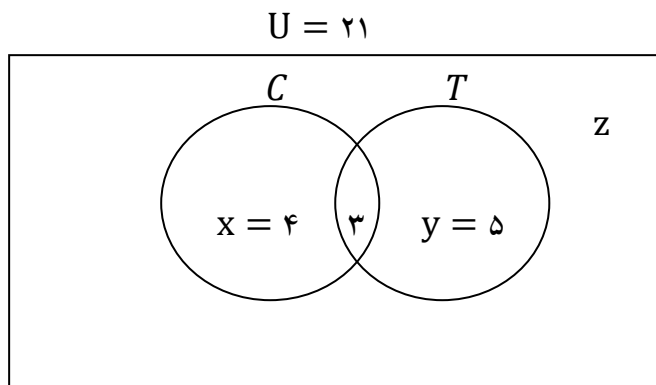
$$C' \cap T' = \text{غیر پویانمایی و غیر طنز}$$

بها
اشتراک

$$n(C' \cap T') \xrightarrow{\text{طبق قانون مورگان}} n(C \cup T)' \xrightarrow{\text{طبق قانون متمم}} n(U) - n(C \cup T) = ۲۱ - ۱۲ = ۹$$

$$n(C \cup T) = n(C) + n(T) - n(C \cap T) = ۷ + ۸ - ۳ = ۱۲$$

روش دوم: طبق نمودار ون ابتدا اگر اشتراك را داده بود اشتراك را می نویسیم و با توجه به سوال نمودار ون را کامل می کنیم و به سوال پاسخ می دهیم.



چون $n(C) = 7$ پس $x = 4$ چون $n(T) = 8$ پس $y = 5$

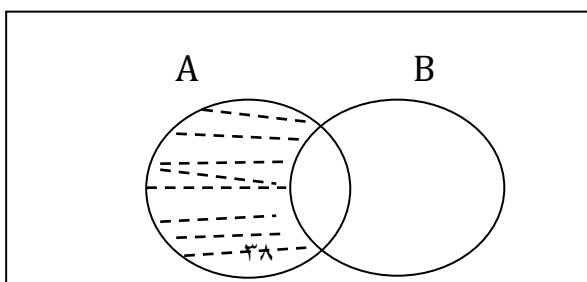
و چون $U = 21$ پس $Z = 9$

پویانمایی یا طنز کل

$9 = 21 - 12 = Z$ غیر پویانمایی و غیر طنز (ب)

۱-۲-۵ تعداد اعضای تفاضل دو مجموعه

الف) فقط A رخ دهد. یعنی $(A \cap B')$ یا $(A - B)$



فقط A رخ دهد

با توجه به رابطه ی $A - B = A - (A \cap B)$ می توان گفت

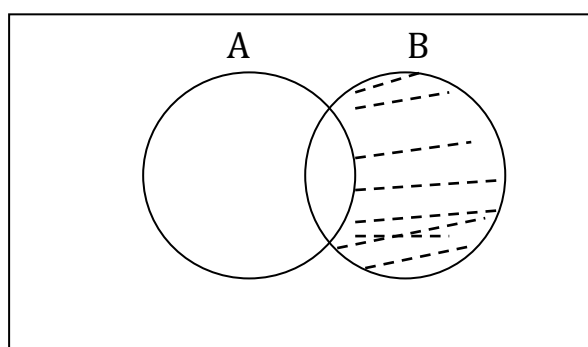
$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$$

همچنین چون $(A \cap B') = (A - B)$ پس $n(A \cap B') = n(A - B)$ یعنی متمم را به تفاضل

تبدیل می کنیم پس

$$n(A \cap B') = n(A) - n(A \cap B)$$

ب) فقط B رخ دهد . یعنی $(B - A)$ یا $(B \cap A')$



فقط B رخ دهد

با توجه به رابطه ی $B - A = B - (A \cap B)$ می توان گفت:

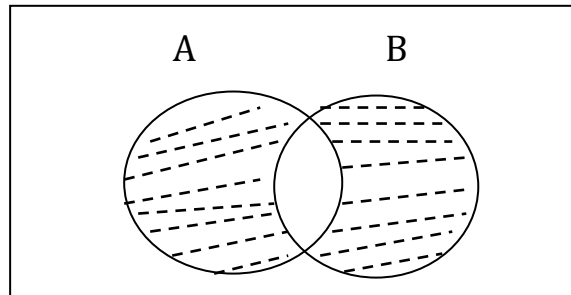
$$n(B - A) = n(B) - n(A \cap B)$$

همچنین چون $(B \cap A') = (B - A)$ پس $n(B \cap A') = n(B - A)$ یعنی متمم را به تفاضل

تبدیل می کنیم پس

$$n(B \cap A') = n(B) - n(A \cap B)$$

ج) فقط (دقیقاً) یکی رخ دهد یعنی $(A - B) \cup (B - A)$



(فقط) دقیقاً یکی رخ دهد

با توجه به شکل داریم:

$$n[(A - B) \cup (B - A)] = n(A \cup B) - n(A \cap B)$$

نکته: مشخصه های تفاضل در سوال کلمات فقط - دقیقاً می باشند

جزوه کنکوری تمام مباحث ریاضیات تالیف حبيب هاشمی در کانال تلگرامی @eshgheriazikonkour

مثال: فرض کنیم A و B زیر مجموعه هایی از مجموعه U باشند، به طوری که

$$n(U) = 100, n(A) = 60, n(B) = 40 \text{ و } n(A \cap B) = 20$$

الف) $n(A \cap B')$ ب) $n(A' \cap B)$

الف) $n(A \cap B') = n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 60 - 20 = 40$

ب) $n(A' \cap B) = n(B \cap A') = n(B) - n(A \cap B) = 40 - 20 = 20$

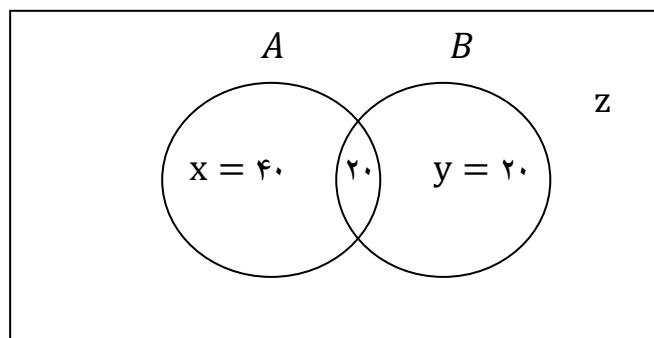
روش دوم: به کمک نمودار ون

ابتدا اشتراک را می نویسیم

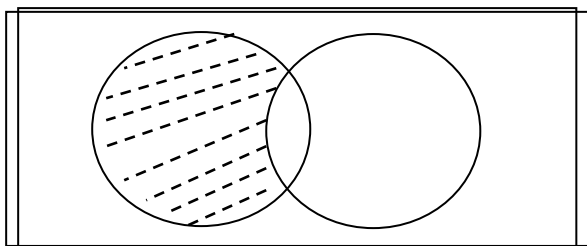
چون $n(A) = 60$ پس $x = 40$ چون $n(B) = 40$ ، پس $y = 20$

و چون $U = 100$ پس $Z = 20$

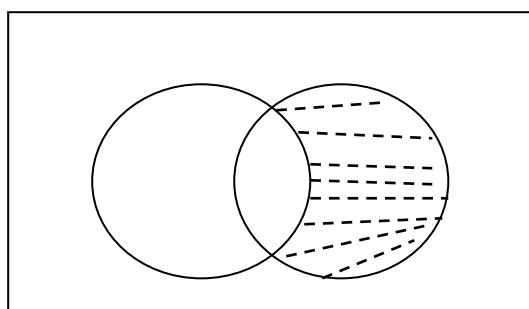
$$U = 100$$



الف) $n(A \cap B') = x = 40$



ب) $n(A' \cap B) = y = 20$



مثال: در يك نظر سنجی از $n(V) = 110$ مشتری يك فروشگاه زنجيره ای ، مشخص شد كه $n(A) = 70$ نفر آنها در يك ماه

گذشته از محصولات شركت A و $n(B) = 57$ نفرشان از محصولات شركت B خريد كرده اند. همچنين $n(A \cup B) = 32$ نفر

از آنان نیز اعلام كردند كه در اين مدت از هر دو شركت خريد كرده اند. چه تعداد از اين 110 نفر در يك ماه گذشته :

الف) دست كم از يکی از اين دو شركت خريد كرده اند.

ب) فقط از شركت A خريد كرده اند.

پ) دقیقاً از يکی از اين دو شركت خريد كرده اند.

ت) از هيچ يك از اين دو شركت خريد نكرده اند.

$n(U) = 110$

$$n(A) = ۷۰$$

$$n(B) = ۵۷$$

$$n(A \cap B) = ۳۲$$

$$\text{الف) } n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = ۷۰ + ۵۷ - ۳۲ = ۹۵$$

$$\text{ب) } n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = ۷۰ - ۳۲ = ۳۸$$

فقط شرکت B یا فقط شرکت A

$$\text{پ) } \overbrace{n(A - B)} + \overbrace{n(B - A)} = ۳۸ + ۲۵ = ۶۳$$

$$n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) = ۵۷ - ۳۲ = ۲۵$$

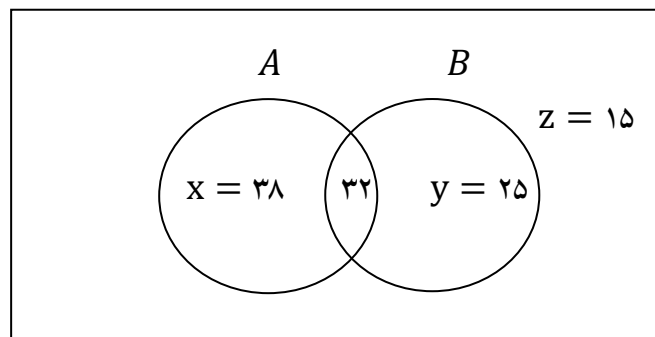
$$\text{ت) } n(A' \cap B') = n(A \cup B)' = n(U) - n(A \cup B) = ۱۱۰ - ۹۵ = ۱۵$$

روش دوم: طبق نمودار ون

$$\text{چون } n(A) = ۷۰ \text{ پس } x = ۳۸ \text{ چون } n(B) = ۵۷ \text{ ، پس } y = ۲۵$$

$$\text{چون } n(U) = ۱۱۰ \text{ پس } z = ۱۵$$

$$n(U) = ۱۱۰$$



$$\text{الف) دست کم از یکی از این دو شرکت خرید کرده اند (الف) } = x + ۳۲ + y = ۳۸ + ۳۲ + ۲۵ = ۹۵$$

ب) $x = 38$ = فقط از شرکت A خرید کرده اند

ت) $x + y = 38 + 25 = 63$ = دقیقاً از یکی از این دو شرکت خرید کرده اند

ت) $Z = 15$ = از هیچ یک از این دو شرکت خرید نکرده اند

مثال: در یک کلاس ۳۱ نفری، تعداد ۱۴ نفر از دانش آموزان عضو گروه سرود و ۱۹ نفر آنها عضو گروه

تئاترند. اگر ۵ نفر از دانش آموزان این کلاس عضو هر دو گروه باشند، مطلوب است:

الف) تعداد دانش آموزانی که فقط عضو گروه سرودند.

ب) تعداد دانش آموزانی که عضو هیچ یک از این دو گروه نیستند.

$$n(U) = 31$$

$$n(A) = 14 \rightarrow \text{تعداد اعضای سرود}$$

$$n(B) = 19 \rightarrow \text{تعداد اعضای تئاتر}$$

$$\text{الف) } n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 14 - 5 = 9$$

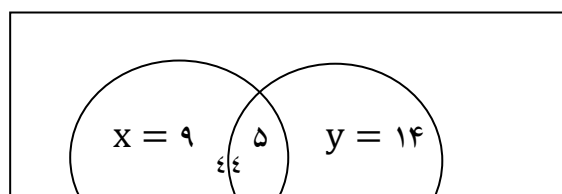
$$\text{ب) } n(A' \cap B') = \underbrace{n(A \cup B)'}_{\text{طبق مورگان}} = n(U) - n(A \cup B) = 31 - 28 = 3$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(A \cap B) = 14 + 5 = 19$$

روش دوم طبق نمودار ون:

ابتدا اشتراک را می نویسیم.

$$n(U) = 31$$



$$Z = 3$$

چون $n(A) = 14$ پس $x = 9$ چون $n(B) = 19$ ، پس $y = 14$

از طرفی چون $n(U) = 31$ پس $Z = 3 \rightarrow 14 + 5 + 9 + Z = 31$

$n = 9$ = تعداد دانش آموزانی که فقط عضو گروه سرودند (الف)

$Z = 3$ = تعداد دانش آموزانی که عضو هیچ یک از دو گروه نیستند (ب)

تمرین: از ۸۵ دانش آموز پایه دهم یک مدرسه، ۵۶ نفر در مسابقات ورزشی و ۴۸ نفر در مسابقات علمی شرکت

کرده اند همچنین ۳۷ نفر نیز در هر دو مسابقه شرکت کرده اند مشخص کنید چه تعداد از این دانش آموزان

الف) حداقل در یک مسابقه شرکت کرده اند

ب) فقط در مسابقات ورزشی شرکت کرده اند.

پ) فقط در یک مسابقه شرکت کرده اند.

ت) در هیچ مسابقه ای شرکت نکرده اند.

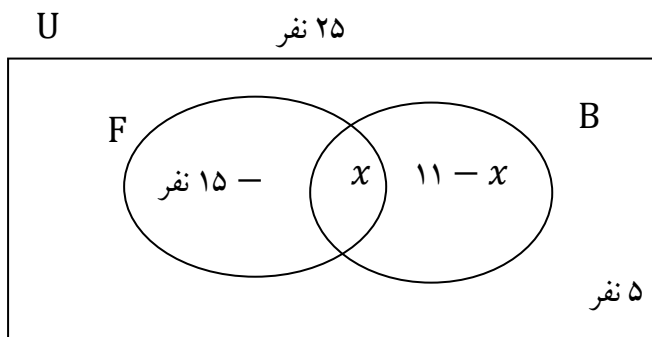
مثال: در يك کلاس ۲۵ نفری، تعداد ۱۵ نفر عضو تیم فوتبال و ۱۱ نفر عضو تیم بسکتبال کلاس هستند.

اگر ۵ نفر از دانش آموزان این کلاس عضو هیچ يك از این دو تیم نباشند، مشخص کنید چند نفر از آنها عضو

$n(B \cap F) = ?$ هر دو تیم هستند.

روش اول حل: چون اشتراك را نداریم آن را x در نظر می گیریم با تکمیل نمودار زیر مقدار x را می یابیم

$$(15 - x) + x + (11 - x) + 5 = 25 \Rightarrow 31 - x = 25 \Rightarrow x = 31 - 25 \Rightarrow x = 6 \rightarrow n(B \cap F)$$



روش دوم حل: چون ۵ نفر عضو هیچ يك از این دو تیم نیستند، پس $n(B \cup F) = 25 - 5 = 20$ کل افراد عضو هیچ کدام

با نوشتن فرمول $n(B \cup F)$ می توان $n(B \cap F)$ را به دست آورد.

$$n(B \cup F) = n(B) + n(F) - n(B \cap F) \Rightarrow 20 = 11 + 15 - n(B \cap F)$$

$$\rightarrow n(B \cap F) = 26 - 20 = 6 \Rightarrow n(B \cap F) = 6$$

مثال: از يك کلاس ۳۲ نفره، ۲۴ نفر فوتبال و ۱۸ نفر والیبال بازی می کنند اگر ۴ نفر از این دانش آموزان این

کلاس عضو هیچ يك از ۲ تیم نباشند مشخص کنید چند نفر در این کلاس هم فوتبال و هم والیبال بازی می

کنند.

$$n(U) = 32$$

$$n(A) = ۲۴ \quad \text{فوتبال}$$

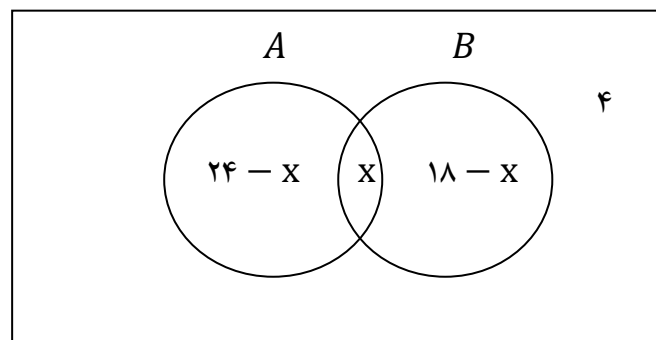
$$n(B) = ۱۸ \quad \text{والیبال}$$

$$n(A \cap B) = ?$$

طبق نمودار ون ابتدا سراغ اشتراک می رویم چون اشتراک نداریم آن را X می گیریم پس $n(A) = ۲۴ - x$

$$\text{و } n(B) = ۱۸ - x$$

$$n(U) = ۳۲$$



$$(۲۴ - x) + x + (۱۸ - x) + ۴ = ۳۲ \Rightarrow ۴۶ + x = ۳۲ \Rightarrow x = ۱۴$$

روش دوم: چون ۴ نفر عضو هیچ یک از دو تیم نیستند پس

$$n(A \cup B) = ۳۲ - ۴ = ۲۸$$

حال با نوشتن فرمول اجتماع داریم:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$۲۸ = ۲۴ + ۱۸ - n(A \cap B) \rightarrow n(A \cap B) = ۱۴$$

مثال: در یک کلاس ۵۰ نفری، ۳۰ نفر در درس ریاضی و ۳۵ نفر در درس فیزیک قبول شده اند، اگر ۱۰ نفر در

هر دو درس مردود شده باشند چند نفر در هر دو درس قبول شده اند.

$$n(U) = 50$$

$$n(A) = 30 \rightarrow \text{قبولی ریاضی}$$

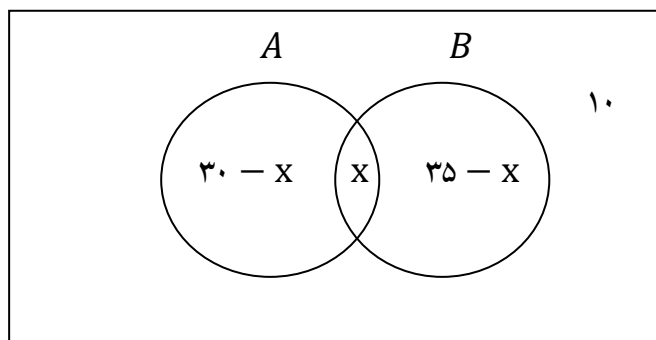
$$n(B) = 35 \rightarrow \text{قبولی فیزیک}$$

متعم
متعم
نه
نه
 $n(A' \cap B') = 10$
در فیزیک
در ریاضی قبول شده اند
ب
ب
اشتراک

$$n(A \cap B) = ?$$

طبق نمودار ون: چو اشتراک نداریم آن را x می گیریم پس $n(A) = 30 - x$ و $n(B) = 35 - x$

$$n(U) = 50$$



$$(30 - x) + x + (35 - x) + 10 = 50$$

$$75 - x = 50 \rightarrow x = 25$$

روش دوم: چون ۱۰ نفر در هیچ یک از دو درس قبول شده اند پس

$$n(A \cup B) = 50 - 10 = 40$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

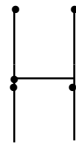
$$40 = 30 + 35 - n(A \cap B) \rightarrow n(A \cap B) = 25$$

درس سوم: الگو و دنباله

۱-۳ الگو

مثال: به شکل زیر و تعداد چوب کبریت های به کار رفته در هر یک از آنها توجه کنید

شکل ۱



۵ چوب کبریت

شکل ۲



۸ چوب کبریت

شکل ۳



۱۱ چوب کبریت

شماره شکل : n	۱	۲	۳	۴	...	n	...
تعداد چوب کبریت ها : a_n	۵	۸	۱۱
رابطه بین n و a_n	$a_1 = 5$	$a_2 = 8$	$a_3 = 11$	$a_n = \dots$	

به عنوان مثال ملاحظه می شود که، «تعداد چوب کبریت های شکل اول برابر ۵ است» که این مطلب را به طور

خلاصه به صورت $a_1 = 5$ نشان داده ایم (می خوانیم : a اندیس ۱ برابر ۵). عبارت های a_1, a_2, a_3 متغیرهای

اندیس دار نامیده می شوند که مقادیر آنها به ترتیب ۵، ۸ و ۱۱ است. به این اعداد جملات الگو هم گفته می شود.

پس در واقع، عدد ۵ جمله ی اول الگوست؛ ۸ جمله ی دوم آن و به همین ترتیب الی آخر.

a_1	a_2	a_3
۵	۸	۱۱

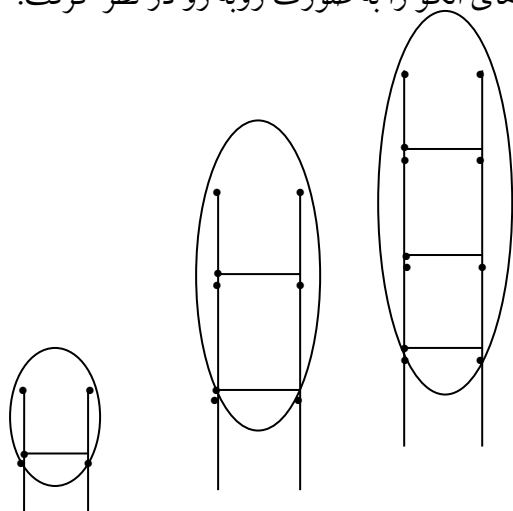
الف) با این نماد گذاری، a_n نشان دهنده جمله ی چهارم الگو است

ب) a_n به معنای جمله ی n ام الگو است.

پ) آیا می توانید حاصل a_n را بر حسب n به دست آورید؟ برای این کار فعالیت بعد را انجام می دهیم.

فعالیت: آید ا برای بدست آوردن حاصل a_n در مثال بالا، شکل های الگو را به صورت روبه رو در نظر گرفت.

به کمک این روش، مقدار a_1 و a_n را بدست آورید.



مرتب شده اش

$$a_n = 3n + 2$$

5	8	11	14	32	\dots
\uparrow	\uparrow	\uparrow	\uparrow	\uparrow	\uparrow
$a_1 = 1(3) + 2$	$a_2 = 2(3) + 2$	$a_3 = 3(3) + 2$	$a_4 = 4(3) + 2$	$a_{10} = 10(3) + 2$	\dots $a_n = n(3) + 2$

تعداد چوب کبریت های شکل ۱

به کمک رابطه ی $a_n = 3n + 2$ تعداد چوب کبریت های شکل بیستم را بیابید.

$$n = 20 \Rightarrow a_{20} = 3(20) + 2 = 62 \Rightarrow a_{20} = 62$$

با استفاده از رابطه $a_n = 3n + 2$ مشخص کنید که چندمین شکل در الگوی بالا دارای $\sqrt[3]{77}$ قطعه کبریت است.

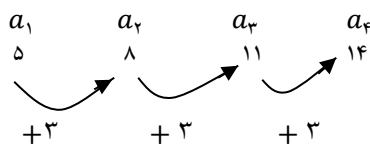
$$a_n = 3n + 2 \Rightarrow 3n = 77 - 2 \Rightarrow n = \frac{75}{3} = 25 \Rightarrow n = 25$$

یعنی ۲۵ امین شکل دارای ۷۷ قطعه چوب کبریت است.

تذکر: در مثال بالا دیدیم که a_n بیانگر تعداد چوب کبریت های شکل n ام است. $a_n = 3n + 2$ را جمله ی عمومی الگو می نامیم؛ چرا که این رابطه در واقع ساختار جملات الگو را مشخص می کند و به کمک آن می توان مقدار هر جمله از الگو را به دست آورد. به عبارت دیگر، در اختیار داشتن جمله ی عمومی یک الگو به معنای آگاهی داشتن از تمام جملات آن الگوست.

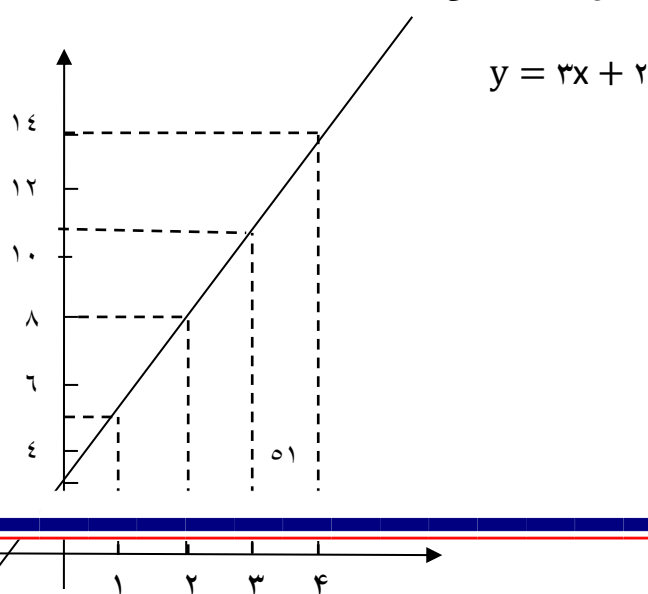
۱-۳-۱ الگوی خطی:

در الگوی مثال قبل دیدیم که هر جمله دقیقاً ۳ واحد بیش از جمله ی قبل از خودش بود.



n	a_n	(n, a_n)
۱	۵	(۱, ۵)
۲	۸	(۲, ۸)
۳	۱۱	(۳, ۱۱)
۴	۱۴	(۴, ۱۴)
.	.	.

شیب خط = اختلاف بین جملات متوالی الگو



(چنين الگویی را که در آنها اختلاف هر دو جمله متوالی عددی ثابت است، الگوهای خطی می نامیم). برای پی بردن به دلیل این نام گذاری، ستون سوم جدول مقابل را در نظر می گیریم. اگر این نقاط را در صفحه ی مختصات مشخص کنیم، همگی آنها روی خط $y = 3x + 2$ قرار می گیرند. به عبارت دیگر مختصات تمام این نقاط در معادله ی خط گفته شده صدق می کند. شباهت بین معادله ی خط یعنی $a_n = 3n + 2$ اتفاقی نیست. عدد ۳ که در واقع اختلاف بین جملات متوالی الگو بود، در معادله ی خط به عنوان شیب خط ظاهر شده است که این مطلب همواره درست است.

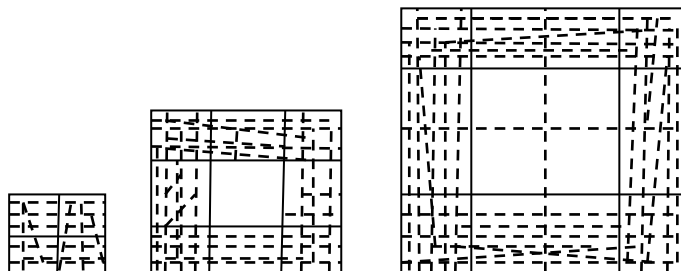
به طور کلی الگوهایی را که جمله ی عمومی آنها به صورت $t_n = an + b$ است، الگوهای خطی می نامیم که در آن a و b اعداد حقیقی دلخواه و ثابت هستند.

دیدیم که در یک الگوی خطی با جمله ی عمومی $t_n = an + b$ ، میزان تغییر جملات متوالی برابر a بود. به عبارت دیگر، اختلاف هر دو جمله ی متوالی در این الگوی خطی برابر ضریب n است. به عنوان مثال در یک الگوی خطی با جمله ی عمومی $t_n = -4n + 15$ ، هر جمله نسبت به جمله ی قبل از خودش ۴ واحد کاهش می یابد.

-۴ -۴ -۴
→ → →
۱۱, ۷, ۳, -۱, -۵, -۹, ...

مثال (الف): شکل بعدی را در الگوی زیر رسم و جدول را کامل کنید.

+۴ +۴ +۴
→ → →
۴, ۸, ۱۲, ...



شکل (۱)

شکل (۲)

شکل (۳)

n : شماره شکل	۱	۲	۳	۴	۵
b_n : تعداد مربع رنگی	۴	۸	۱۲	۱۶	۲۰

رابطه بین n و b_n $b_1 = 4$ $b_2 = 8$ $b_3 = 12$ $b_4 = 16$ $b_5 = 20$

ب) توضیح دهید که چرا این الگوی یک الگوی خطی محسوب می شود؟ چون اختلاف هر دو جمله ی متوالی در آن، عددی ثابت است.

پ) با توجه به میزان افزایش جملات الگو، مقدار a در رابطه ی $b_n = an + h$ را بیابید و پس از حدس زدن مقدار h ، حاصل b_n را بدست آورید؟ اختلاف هر دو جمله ی متوالی برابر ۴ است پس $a = 4$ و $h = 0$
 پس $b_n = 4n + 0$

ت) شکل شماره ۲۵۰ دارای چند مربع رنگی است؟

$$b_n = 4n \xrightarrow{n=250} b_{250} = 4 \times 250 = 1000$$

ث) در چه مرحله ای از الگوی بالا، تعداد مربع های رنگی برابر ۱۴۴ است؟

$$b_n = 4n \Rightarrow 144 = 4n \Rightarrow n = \frac{144}{4} = 36 \Rightarrow n = 36$$

یعنی در مرحله ۳۶ ام، تعداد مربع های رنگی برابر ۱۴۴ تا می شود.

مثال: در یک الگوی خطی، جملات چهارم و دهم به ترتیب ۱۷، ۴۱ می باشد جمله ی عمومی الگو را بیابید.

حل) فرض کنیم جمله عمومی الگو به صورت $t_n = an + b$ باشد پس داریم.

$$t_4 = 17 \xrightarrow{n=4} t_4 = a(4) + b \xrightarrow{t_4=17} 17 = 4a + b$$

$$t_{10} = 41 \xrightarrow{n=10} t_{10} = a(10) + b \xrightarrow{t_{10}=41} 41 = 10a + b$$

$$\begin{cases} 4a + b = 17 \\ 10a + b = 41 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4a + b = 17 \\ 10a + b = 41 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4a - b = -17 \\ 10a + b = 41 \end{cases}$$
$$\frac{\quad\quad\quad}{6a = 24 \rightarrow a = \frac{24}{6} = 4}$$

$$10a + b = 41 \xrightarrow{a=4} 10(4) + b = 41 \rightarrow 40 + b = 41 \rightarrow b = 1$$

$$\Rightarrow t_n = an + b \xrightarrow{a=4, b=1} t_n = 4n + 1$$

بنابراین جملات الگو به صورت روبرو خواهند بود.

۵, ۹, ۱۳, ۱۷, ۲۱, ...

۱-۳-۱۲ الگوهای غیر خطی

جهت تهیه جزوه کل کتاب به سایت ریاضی کده سر بزنید

www.riazikade.com

یا به شماره زیر پیام دهید

۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

حبيب هاشمی