

## درس اول: آشنایی با منطق ریاضی

**تعریف:** منطق در لغت به معنای « آنچه به گفته درآمده » و عموماً آن را به معنای بررسی استدلال‌ها تعبیر می‌کنند. تعبیر دیگری از منطق، روش درست فکر کردن است.

استدلال ساده‌ی زیر را در نظر بگیرید:

فقط روزهای دوشنبه نانوايي محله ی ما تعطیل است.

امروز نانوايي محله ما تعطیل است.

نتیجه: امروز دوشنبه است.

این استدلال از چند جمله‌ی خبری به دست می‌آید، اگر دو جمله‌ی اول این استدلال را درست در نظر بگیریم، در این صورت، نتیجه‌گیری جمله‌ی سوم منطقی به نظر می‌رسد.

نکته: کاربرد منطق در تشخیص اعتبار استدلال‌هاست.

## گزاره

**گزاره:** به جمله‌ی خبری که در حال حاضر یا آینده، دارای ارزش درست یا نادرست (راست<sup>۱</sup> یا دروغ<sup>۲</sup>) باشد، گزاره<sup>۳</sup> می‌گوییم. معمولاً گزاره‌ها را با حروف  $P$ ،  $q$ ،  $r$  ... نمایش می‌دهند.

<sup>۱</sup> Truth  
<sup>۲</sup> False  
<sup>۳</sup> Proposition

**مثال:** جملات زیر همگی گزاره هستند.

الف) ایران کشور آسیایی است.

ب) ماست سیاه است.

ج) یازده عددی زوج است.

**ارزش گزاره:** درست یا نادرست بودن یک گزاره را ارزش گزاره می‌گوییم. ارزش گزاره درست را با

حرف «د» یا «T» و ارزش گزاره نادرست را با حرف «ن» یا «F» نمایش می‌دهیم.

**نکته:** یک گزاره نمی‌تواند هم درست و هم نادرست باشد، یعنی گزاره فقط یک ارزش دارد.

**نکته:** جمله‌های پرسشی، امری و عاطفی ( نشان دهنده احساسات ) دعائی ' آرزویی و نظایر آن

گزاره محسوب نمی‌شود؛ زیرا خبری را بیان نمی‌کنند همچنین نمی‌توان حکم به درستی یا

نادرستی آنها نمود فقط جمله‌های خبری هستند که دو ارزش بیشتر ندارند یا قطعاً راست هستند

یا قطعاً دروغ می‌باشند.

**مثال:** جمله‌های زیر هیچ خبری را بیان نمی‌کنند؛ بنابراین گزاره محسوب نمی‌شوند.

بیا.

نرفته‌ای؟

الهی خوشبخت شوی

ای کاش جوان بودم

چه هوای خوبی! ( ابراز احساسات )

لطفاً در کلاس را ببندید. ( امری )

اینجا آشپز کیست؟ ( پرسشی )

**نکته:** ارزش درستی یا دروغ بودن یک گزاره گاهی معلوم نیست مانند گزاره های زیر

الف) نیوتن ظهر روز قبل از مرگش سرفه کرد.

ب) درکشان های دیگر، حیات وجود دارد.

**مثال:** از بین جمله های زیر، گزاره ها را مشخص کنید و ارزش آنها را در صورت امکان تعیین کنید.

الف) در پرتاب یک تاس، احتمال آنکه تاس مضرب ۳ بیاید، برابر با  $\frac{1}{3}$  است. گزاره هست. و ارزش آن درست است.

ب) ای کاش می توانستم در یک هوای پاک زندگی کنم. گزاره نیست

پ) آیا  $2+3$  برابر با ۵ است؟ گزاره نیست

ت) هر عدد فرد بزرگ تر از ۵ را می توان به صورت مجموع سه عدد اول نوشت. گزاره هست و ارزش آن نامعلوم می باشد

ث) هر معادله درجه دوم دو ریشه حقیقی متمایز دارد. گزاره هست و ارزش آن نادرست است.

ج) صدمین رقم بعد از ممیز عدد  $\pi$  برابر با ۵ است. گزاره هست.

**مثال:** کدام یک از جملات زیر گزاره هستند .

- (۱) ۳۷ عددی فرد است . گزاره هست
- (۲)  $-7 < -4$  . گزاره هست
- (۳)  $10^{13}$  عدد بزرگی است . گزاره نیست
- (۴)  $2^{100} + 1$  عدد اول است . گزاره هست
- (۵) هزارمین عدد اول ۷۳۵۴۲۱ است . گزاره هست .
- (۶) گل سرخ زیباست . گزاره نیست
- (۷) سعدی شاعر خوبی است . گزاره نیست
- (۸) به به چه باغ زیبایی . گزاره نیست
- (۹) لطفاً کتاب هایتان را باز کنید . گزاره نیست
- (۱۰) چه هوای خوبی! گزاره نیست
- (۱۱) اینجا آشپز کیست ؟ گزاره نیست
- (۱۲) لطفاً درب کلاس را ببندید . گزاره نیست

**مثال:** از جملات زیر کدام گزاره است ، ارزش گزاره ها را در صورت امکان مشخص کنید .

- الف) خیام پزشک ایرانی است . گزاره هست و نادرست
- ب) افلاطون فیلسوف یونانی است . گزاره هست و درست
- پ)  $3 + 5 > 6$  . گزاره هست و درست
- ت) تخته سیاه را پاک کنید . گزاره نیست
- ث)  $\{1\} \in \{2, 3, 4\}$  . گزاره هست و نادرست
- ج) چه باران شدیدی می آید . گزاره نیست
- چ) عدد ۱۹۱۷ عددی اول است . گزاره هست و نادرست

ح)  $\emptyset \notin R$  گزاره هست و نادرست

خ)  $\sqrt{2} \in Z$  گزاره هست و نادرست

د) عدد  $5^9 + 8$  عددی اول است. گزاره هست

ذ) به امید کامیابی شما. گزاره نیست

ر) آیا شما درس می خوانید؟ گزاره نیست

**تعریف (جبر گزاره‌ها):** در منطق ریاضی و در جبر گزاره‌ها هر گزاره را با یکی از حروف انگلیسی مانند  $p$  یا  $q$  یا  $r$  ... نمایش می‌دهیم.

### الگوریتم تشکیل جدول درستی

۱. اسم گزاره‌ها را به ترتیب حروف الفبایی می‌نویسیم ( $\dots, r, q, p$ )

۲. تعداد سطرهای لازم را به دست می‌آوریم (تعداد گزاره‌ها  $\times 2 =$  تعداد سطرها). در ستون مربوط به آخرین گزاره (گزاره سمت راست)، به تعداد سطرهای حساب شده، یک در میان  $T$  و  $F$  بنویسید.

$P$	$q$
	$T$
	$F$
	$T$
	$F$

۳. به ستون سمت چپ برگشته و به جای اینکه یک در میان یک  $T$  و یک  $F$  بنویسید، یک در

میان دو تا  $T$  و دو تا  $F$  بنویسید.

$P$	$q$
$T$	$T$
$T$	$F$
$F$	$T$
$F$	$F$

۴. در صورت لزوم، این فرایند را برای متغیرهای باقیمانده با دو برابر کردن تعداد  $T$  ها و  $F$  ها

نسبت به ستون سمت راست، جهت یک بار در میان نوشتن تکرار می‌کنیم.

مثال:

هر گزاره دارای ارزش درست و نادرست است؛ بنابراین، هر گزاره‌مانند  $p$  فقط یکی از دو حالت ارزش گزاره را طبق جدول روبه رو می‌گیرد.

$p$
د
ن

ارزش های دو گزاره  $p$  و  $q$ ، طبق جدول روبه رو چهار حالت دارد.

$p$	$q$
د	د
د	ن
ن	د
ن	ن

ارزش های سه گزاره p، q و r، طبق جدول روبه رو  $2^3 = 8$  سطر دارد.

p	q	r
د	د	د
د	د	ن
د	ن	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	د	ن
ن	ن	د
ن	ن	ن



نقیض یک گزاره:

نقیض یک گزاره گزاره ای است که ارزش گزاره ی اول را نفی می کند.

نقیض گزاره  $P$  به صورت  $\sim p$  نوشته می شود و آن را «چنین نیست که  $p$ » می خوانیم. اگر ارزش گزاره  $p$  درست باشد. در این صورت، ارزش گزاره  $\sim p$  نادرست است و وقتی که  $p$  نادرست باشد، ارزش نقیض آن درست است. به علامت « $\sim$ » ناقض گفته می شود و «چنین نیست که» خوانده می شود.

**مثال:** نقیض گزاره «۲ عددی گنگ است» را می توان به صورت های زیر نوشت.

«چنین نیست که ۲ عددی گنگ باشد» یا «۲ عددی گنگ نیست»

جدول ارزش برای نقیض یک گزاره که تمام حالت های ممکن را برای درستی یا نادرستی گزاره

در نظر می گیرد، به صورت روبه روست:

$p$	$\sim p$
د	ن
ن	د

**مثال:** نقیض گزاره های زیر را بنویسید.

(۱)  $7$  عددی فرد است (درست)  $\leftarrow$  نقیض  $7$  عددی فرد نیست)

نادرست)

(۲)  $31$  عددی اول است (درست)  $\leftarrow$  نقیض  $31$  عددی اول نیست (نادرست)

(۳)  $10^2 + 10^3 = 10^5$  (نادرست)  $\leftarrow$  نقیض  $10^2 + 10^3 \neq 10^5$  (درست)

(۴)  $\sqrt{9+16} = 3+4$  (نادرست)  $\leftarrow$  نقیض  $\sqrt{9+16} \neq 3+4$  (درست)

(۵)  $7 > 3$  (درست)  $\leftarrow$  <sup>نقیض</sup>  $7 \leq 3$  (نادرست)

(۶)  $2$  عددی گنگ است (نادرست)  $\leftarrow$  <sup>نقیض</sup>  $2$  عددی گنگ نیست (درست)

(۷)  $4 \leq 3$  (نادرست)  $\leftarrow$  <sup>نقیض</sup>  $4 > 3$  (درست)

(۸)  $a \in \{b, c, d\}$  (نادرست)  $\leftarrow$  <sup>نقیض</sup>  $a \notin \{b, c, d\}$  (درست)

(۹) ابولوفای بوزجانی ریاضی دان ایرانی است (درست)  $\leftarrow$  <sup>نقیض</sup> ابولوفای بوزجانی ریاضی دان ایرانی

نیست .

( نادرست )

**مثال:** نقیض گزاره های زیر را بنویسید .

الف)  $\sqrt{10} < 10$  (الف)  $\frac{15}{3} \leq 3$  (ب)  $3 \in \{1, 2, 5\}$  (پ)  $2^2 +$  (ت)

$2^3 = 2^5$

الف)  $P: (\sqrt{10} < 10) \Rightarrow \sim P: (\sqrt{10} \geq 10)$

ب)  $p: \left(\frac{15}{3} \leq 3\right) \Rightarrow \sim p: \left(\frac{15}{3} > 3\right)$

پ)  $p: (3 \in \{1, 2, 5\}) \Rightarrow \sim p: (3 \notin \{1, 2, 5\})$

ت)  $p: (2^2 + 2^3 = 2^5) \Rightarrow \sim p: (2^2 + 2^3 \neq 2^5)$

## ترکیب گزارها

همان گونه که در علم حساب، چهار عمل اصلی را بر روی اعداد، اعمال و اعداد جدیدی به دست می آوریم در حساب گزاره ها نیز می توانیم گزاره ها را با استفاده از برخی حروف پیوندی، ترکیب و گزاره های جدیدی به دست آوریم. به عنوان مثال «عدد ۲ زوج است و عدد ۵ مضرب ۳ است» این گزاره از دو بخش تشکیل شده است که اگر حرف  $p$  را برای نمایش گزاره «عدد ۲ زوج است» و حرف  $q$  را برای نمایش گزاره «عدد ۵ مضرب ۳ است» به کار ببریم آنگاه عبارت مزبور را به صورت  $q \vee p$  می نویسیم. در این مثال حرف «و» برای ترکیب دو گزاره به منظور تشکیل گزاره واحد به کار رفته است که درست یا نادرست بودن آن به هر یک از گزاره های  $p$  و  $q$  بستگی دارد.

**نکته:** از ترکیب دو یا چند گزاره ساده به وسیلهٔ رابط های گزاره ای (ادات ربط)، گزاره های مرکب به دست می آیند.

**رابط های گزاره ای:** رابط های گزاره ای عبارتند از «و»، «یا»، «اگر - آنگاه»، «اگر و تنها اگر» که گزاره های ساده را به هم وصل می کند.

**مثال:** گزاره های زیر همگی مرکب هستند.

الف) عدد ۲ زوج است یا عدد ۵ مضرب ۳ است.

ب) عدد ۲ زوج است و عدد ۵ مضرب ۳ است

پ) اگر عدد ۲ زوج باشد، آنگاه عدد ۵ مضرب ۳ است.

ت) عدد ۲ زوج است اگر و تنها اگر عدد ۵ مضرب ۳ باشد.

## ترکیب فصلی دو گزاره

گزاره های زیر را در نظر بگیرید.

$p$ :  $\sqrt{3}$  عددی حقیقی است.

$q$ : ۲ عددی اول نیست .

گزاره مرکب «  $\sqrt{3}$  عددی حقیقی است، یا ۲ عددی اول نیست » که از ترکیب دو گزاره ساده  $p$  و  $q$  با ربط منطقی « یا » تشکیل شده است ، ترکیب فصلی دو گزاره می گوئیم . هرگاه  $p$  و  $q$  دو گزاره باشند ، گزاره مرکب «  $p$  و  $q$  » را که به صورت «  $p \vee q$  » می نویسند، ترکیب فصلی دو گزاره می گوئیم . در اینجا به رابط منطقی « $\vee$ » **فاصل** گفته می شود .

جدول ارزش گزاره  $p \vee q$  به صورت زیر است.

$p$	$q$	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

**مثال:** از ترکیبات فصلی زیر همه، به جز چهارمی، درست اند:

- ماست سفید است یا خروس دو پا دارد.

- ماست سفید است یا خروس سه پا دارد.

- ماست سیاه است یا خروس دو پا دارد.

- ماست سیاه است یا خروس سه پا دارد.

**مثال:** کدام یک از گزاره های زیر درست است؟

(الف)  $(5 < 7) \vee ((-3)^2 = 9)$  (ب) ۹۳ عددی فرد یا عددی اول است.

(پ)  $(2^9 = 512) \vee (5^4 = 125)$  (ت)  $(\sqrt{3^2 + 5^2} = 3 + 5) \vee (3 + 5)! = 3! + 5!$

(ث)  $(5 > 3) \vee (2 = 0)$

حل الف) ارزش گزاره  $(5 < 7)$  درست است و ارزش گزاره  $(-3)^2 = 9$  نیز درست است، پس ارزش گزاره ترکیب فصلی درست است.

ب) ارزش گزاره «۹۳ عددی فرد است.» درست و ارزش گزاره «۹۳ عددی اول است.» نادرست است. پس ارزش گزاره ترکیب فصلی درست است.

پ) ارزش گزاره « $5^4 = 125$ » نادرست است و ارزش گزاره « $2^9 = 512$ » درست است. پس ارزش گزاره ترکیب فصلی درست است.

ت) ارزش گزاره « $(3 + 5)! = 3! + 5!$ » نادرست است، زیرا  $8! \neq 6 + 120 \Rightarrow$   
 ارزش گزاره  $40320 \neq 126$  و ارزش گزاره  $8 = \sqrt{34} \Rightarrow \sqrt{9 + 25} = 3 + 5$  نیز نادرست است، پس  
 ارزش گزاره ترکیب فصلی نیز نادرست است.

ث) درست

**مثال:** هرگاه  $a$  و  $b$  دو عدد حقیقی باشند به طوری که  $a \times b = 0$  در این صورت  $a = 0$  یا  $b = 0$   
 یعنی:

$$a, b \in \mathbb{R}, a \times b = 0 \Rightarrow (a = 0) \vee (b = 0)$$

از ویژگی مثال قبل، برای حل معادله ها استفاده می کنیم:

$$x^2 + 7x = 0 \Rightarrow x(x + 7) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ یا } x + 7 = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ یا } x = -7$$

مثال: جدول زیر را کامل کنید.

ردیف	گزاره	درست	نادرست
۱	عدد ۴ عددی فرد یا عددی اول است.		
۲	حضرت مهدی (عج) امام دوازدهم شیعیان است یا .....	✓	
۳	۹۱ عددی مرکب است یا .....	✓	
۴	..... یا افلاطون نویسنده کتاب ارغنون است.		✓
۵	..... یا .....	✓	

## ترکیب عطفی دو گزاره

هرگاه  $p$  و  $q$  دو گزاره باشند، گزاره مرکب « $p \wedge q$ » که خوانده می شود « $p$  و  $q$ » را ترکیب عطفی دو گزاره می گوئیم. در اینجا به رابط منطقی « $\wedge$ » عطف گفته می شود.

جدول ارزش  $p \wedge q$  به صورت روبه رو است:

$p$	$q$	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

مثال:

گزاره p	گزاره q	ارزش p	ارزش q	ارزش $p \vee q$	ارزش $p \wedge q$
هفته هفت روز دارد	ماه شهریور ۳۱ روز دارد	د	د	د	د
عدد ۲ اول نیست	عدد ۷ مضرب ۵ نیست	ن	د	د	ن
۲ عددی اول است	عدد ۵ مرکب است	د	ن	د	ن
۲ عددی مرکب است	عدد ۷ مضرب ۴ است	ن	ن	ن	ن
(-7) اول است	۵ عددی اول است	ن	د	د	ن

مثال: کدام یک از گزاره های زیر درست است؟

الف) عدد ۱۴۴ بر ۴ و ۳۶ بخش پذیر است. (ب) رم پایتخت ایتالیا و یکی از شهرهای ایران است.

پ)  $(4 < 5) \wedge (-3 < -5)$  (ت)  $((2^3)^2 > 2^{3^2}) \wedge (\sqrt{0/04} > \sqrt{0/01})$

ث)  $(\frac{1}{2} \neq \frac{3}{6}) \vee (1 \in \{2, 3, 4\})$

حل الف) گزاره اول یعنی « ۱۴۴ بر ۴ بخش پذیر است » درست و گزاره دوم یعنی « ۱۴۴ بر ۳۶ بخش پذیر است » نیز درست است ، در نتیجه ارزش گزاره ترکیب عطفی نیز درست است .

ب) گزاره اول « رم پایتخت ایتالیا است. » درست و گزاره دوم « رم یکی از شهرهای ایران است. » نادرست است، پس ارزش گزاره ترکیب عاطفی نادرست است.



پ) ارزش گزاره « $-3 < -5$ » نادرست و ارزش گزاره « $4 < 5$ » درست است. پس ارزش گزاره ترکیب عطفی نادرست است.

ت) گزاره « $0/2 > 0/1 \Rightarrow \sqrt{0/04} > \sqrt{0/01}$ » دارای ارزش درست است و گزاره « $64 > 512 \Rightarrow 8^2 > 2^9 \Rightarrow (2^3)^2 > 2^{3^2}$ » نیز دارای ارزش نادرست است، پس ارزش گزاره ترکیب عطفی نادرست است.

ث) نادرست

**تذکر:** از الفاظ که از نظر منطقی مترادف عطف است لفظ «اما - ولی» است. مثلاً گزاره ی « $\gamma$  فرد است ولی اول نیست به معنی « $\gamma$  فرد است و  $\gamma$  اول نیست» می باشد که البته گزاره ای نادرست است.

### نحوه تکمیل کردن جدول ارزش گزاره های مرکب

چند سطر سمت چپ جدول را به گزاره های  $p, q, r, \dots$  اختصاص می دهیم (با توجه به تعداد گزاره های به کار رفته در سوال) و همانند آنچه که در تشکیل جدول گزاره ها بیان کردیم ستون های مربوط به آنها را تکمیل می کنیم

گزاره را با توجه به اولویت بندی زیر از چپ به راست در سطر اول قرار می دهیم و آنها را ارزیابی می کنیم.

الف) نخست داخلی ترین پرانتز را قرار می دهیم و آن را ارزیابی می کنیم

ب) برای داخلی ترین پرانتز اولویت انجام محاسبات به صورت زیر است:

۱. در مرحله نخست ~ انجام می شود.

۲. در مرحله بعد اعمال  $\wedge$  و  $\vee$  از چپ به راست انجام می شود.

۳. در پایان اعمال  $\Rightarrow$  و  $\Leftrightarrow$  از چپ به راست انجام می شود.

مثال: جدول ارزش هر مورد را رسم کنید.

الف)  $p \vee (\sim q \vee p)$

$p$	$q$	$\sim q$	$\sim q \vee p$	$p \vee (\sim q \vee p)$
د	د	ن	د	د
د	ن	د	د	د
ن	د	ن	ن	ن
ن	ن	د	د	د

ب)  $(p \vee q) \vee (\sim p \vee r)$

$p$	$q$	$r$	$p \vee q$	$p \sim$	$p \vee r \sim$	$(p \vee q) \vee (\sim p \vee r)$
د	د	د	د	ن	د	د
د	د	ن	د	ن	ن	د
د	ن	د	د	ن	د	د
د	ن	ن	د	ن	ن	د
ن	د	د	د	د	د	د
ن	د	ن	د	د	د	د
ن	ن	د	ن	د	د	د
ن	ن	ن	ن	د	د	د

پ)  $\sim (p \vee \sim q)$

$p$	$q$	$\sim q$	$p \vee \sim q$	$\sim (p \vee \sim q)$
د	د	ن	د	ن
د	ن	د	د	ن
ن	د	ن	ن	د
ن	ن	د	د	ن

ت)  $\sim (p \wedge \sim q)$ 

$p$	$q$	$q \sim$	$p \wedge \sim q$	$\sim (p \wedge \sim q)$
د	د	ن	ن	د
د	ن	د	د	ن
ن	د	ن	ن	د
ن	ن	د	ن	د

گزاره های هم ارز منطقی

جهت تهیه ادامه‌ی جزوه به سایت ریاضی کده سر بزنید


[www.riazikade.com](http://www.riazikade.com)

یا به شماره زیر پیام دهید

۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

حبیب هاشمی