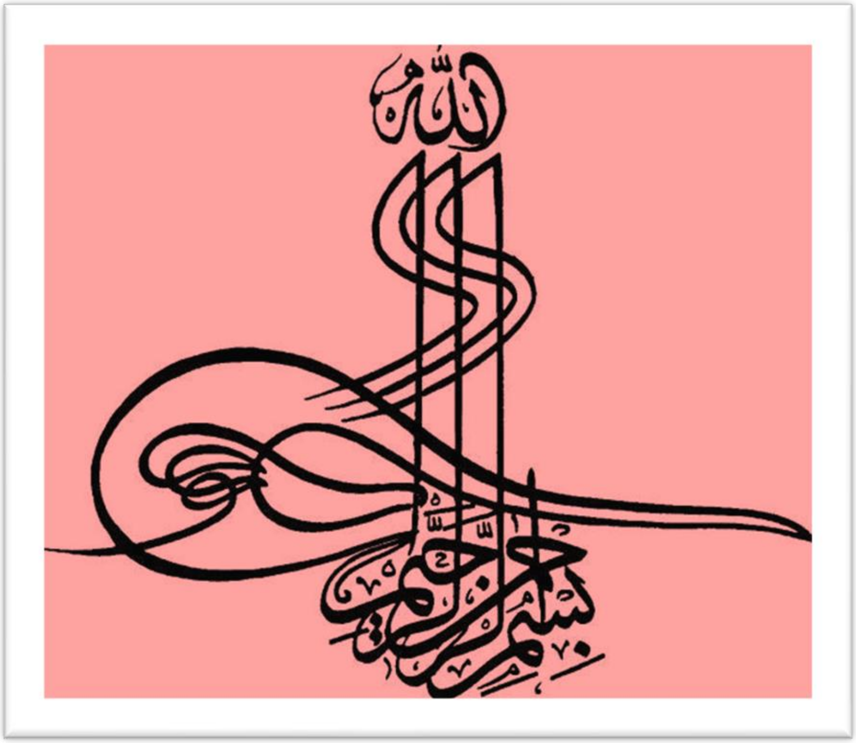


آمار و احتمال

فصل اول ریاضی و آمار دوازدهم انسانی

- طبقه بندی سوالات به صورت موضوعی
- پاسخ کاملا تشریحی سوالات کنکور سراسری
- حل تمامی تمرینات ،کاردرکلاس ها و فعالیت ها

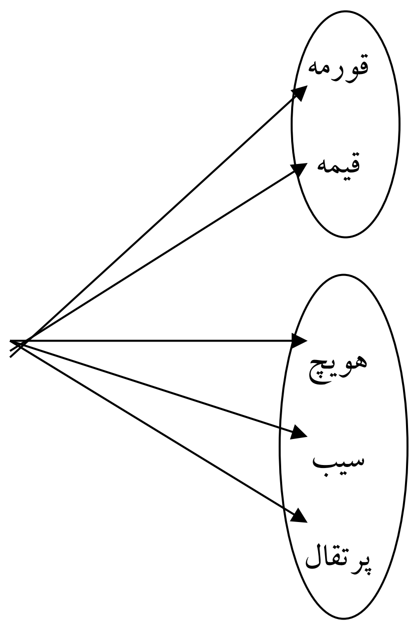
مولف:
حبیب هاشمی

درس اول : شمارش

اصل جمع و اصل ضرب

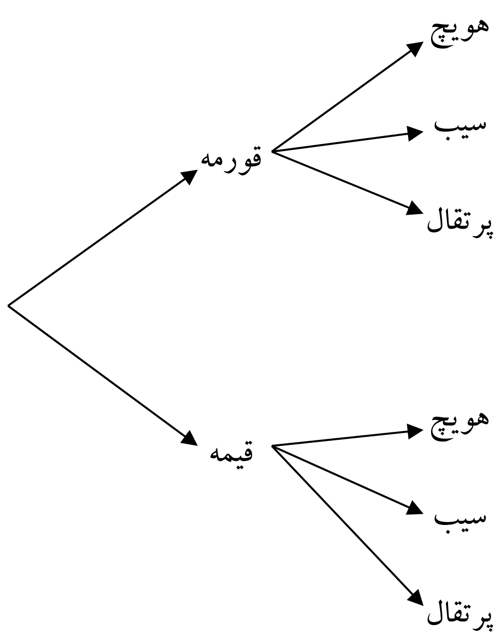
مثال:کیان قصد دارد به خاطر قبولی در یک آزمون به دوستش کمیل، شیرینی بدهد. او با خود فکر می کند که کمیل را به یکی از دو مکان رستوران **«یا»** آب میوه فروشی دعوت کند. اگر به رستوران برود، تنها یکی از ۲ نوع غذای چلو خورشت قورمه سبزی و قیمه را می تواند انتخاب کند و اگر به آب میوه فروشی برود، تنها یکی از سه نوع آب میوه هویچ، سیب و پرتقال را می تواند انتخاب کند. چند انتخاب برای کمیل وجود دارد؟

طبق نمودار زیر ۵ انتخاب وجود دارد.



مثال: هفته بعد کمیل قصد دارد به خاطر تولدش کیان را دعوت کند. اما او می خواهد کیان را هم به آن رستوران « **و** »هم به آن آب میوه فروشی ببرد و در رستوران یک انتخاب و در آب میوه فروشی هم یک انتخاب به او بدهد. کیان چند نوع انتخاب خواهد داشت؟

با توجه به نمودار زیر ۶ انتخاب خواهد داشت.



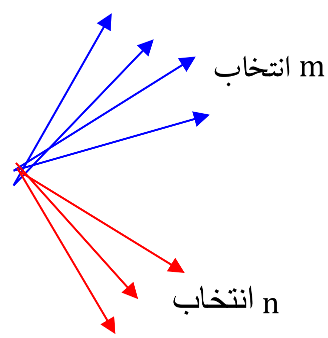
پرسش: چه تفاوتی در دو سؤال بالا وجود داشت که باعث شد تعداد حالت های موجود در دو مثال متفاوت باشد؟

در سوال اول کیان فقط به یکی از دو روش کار را انجام می دهد، یا آنکه به رستوران رفته و یکی از دو غذا را انتخاب می کند و یا آنکه به آب میوه فروشی رفته و یکی از سه نوع آب میوه را انتخاب خواهد کرد. ولی در سؤال دوم کمیل هر دو مکان را خواهد رفت که در اولی ۲ انتخاب و در دومی ۳ انتخاب دارد.

پرسش: در هر یک از دو سؤال بالا چه رابطه ای بین تعداد گزینه های فهرست های انتخابی رستوران و آب میوه فروشی و تعداد حالات جواب وجود دارد؟ چرا؟

در سؤال اول ۵=۳+۲ حالت وجود داشت چون فقط یکی از دو مکان را انتخاب می کرد، ولی در سوال دوم ۶=۳×۲ حالت، چون هر دو مکان را خواهد رفت که در مقابل هر انتخاب در مکان اول، ۳ انتخاب در مکان دوم وجود دارد.

اصل جمع: اگربتوان عملی را به m طریق و عمل دیگری را به n طریق انجام داد و این دو عمل را نتوان با هم انجام داد ،در این صورت به $m+n$ طریق می توان عمل اول **یا** عمل دوم را انجام داد.



«توجه کنید که نهایتاً قرار است کار مورد نظر فقط با یکی از شیوه ها انجام شود. مثلاً در مثال ۱، کیان فقط یکی از کارهای « دعوت به رستوران **یا** دعوت به آب میوه فروشی » را انجام می دهد»

اصل ضرب: اگرعملی طی دو مرحله ی اول و دوم انجام پذیرد طوری که در مرحله ی اول به m طریق **و** در مرحله ی دوم هر کدام از این m طریق به n روش انجام پذیر باشند، در کل آن عمل به $m \times n$ طریق انجام پذیر خواهد بود.

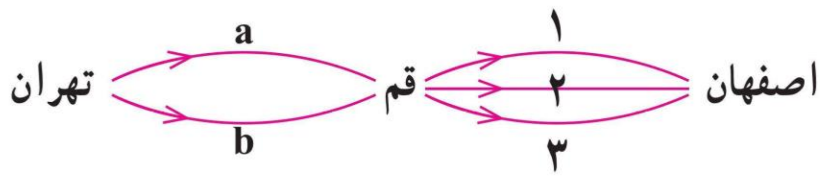
« توجه کنید که هر دو مرحله باید انجام پذیرد. مثلاً در مثال ۲ هم دعوت به رستوران که مرحله اول است انجام می گیرد **و** هم دعوت با آب میوه فروشی که مرحله دوم است، صورت می پذیرد».

مثال: کتابخانه ی مدرسه ای ۴۰ کتاب در زمینه ریاضی و ۵۰ کتاب در زمینه ی ادبیات دارد. اگر یک دانش آموز بخواهد یکی از کتاب های کتابخانه را در زمینه ریاضی یا ادبیات انتخاب کند به چند راه می تواند این کار را انجام دهد؟ ۹۰=۵۰+۴۰ بنابراین ۹۰راه وجود دارد

مثال: از بین ۴ نوع غذای مختلف و ۵ نوع سالاد در یک رستوران به چند طریق می توان غذایی به همراه سالاد سفارش داد؟ ۲۰=۵× ۴ بنابراین ۲۰ نوع سفارش مختلف داریم

مثال :فردی می خواهد با اتومبیل خود از تهران به اصفهان برود و برای این کار قصد دارد از قم عبور کند. اگر از تهران به قم دو مسیر b وa و از قم به اصفهان سه مسیر ۱و ۲و ۳ وجود داشته باشند، این فرد به چند طریق می تواند از تهران به اصفهان صفر کند؟

a,۱	a,۲	a,۳
b,۱	b,۲	b,۳



مثال: یک کارخانه خودروسازی خودروهایی در ۷ رنگ ، با ۲ حجم موتور و۳ نوع مختلف جلو داشبورد تولید می کند. یک خریدار برای خرید یک خودرو از این کارخانه چند انتخاب دارد؟

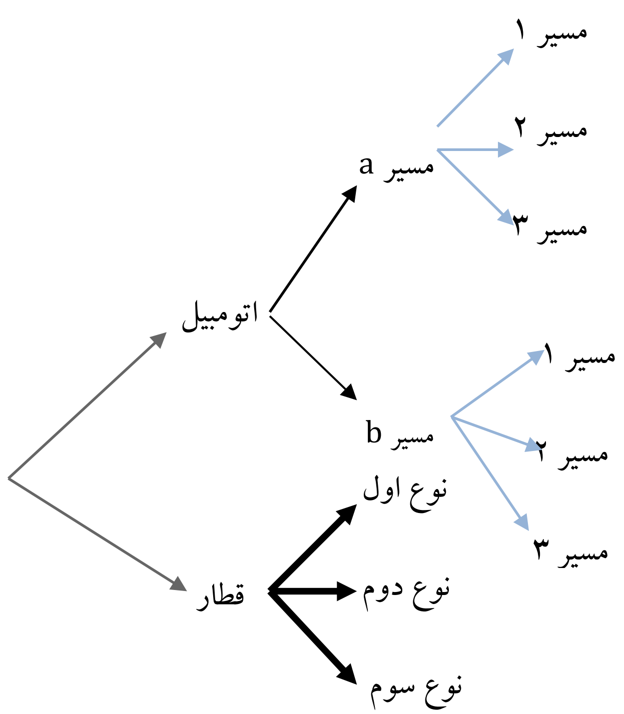
۷ × ۲ × ۳ = ۴۲

مثال: ۵نفر به سینما می روند و در یک ردیف ۷ صندلی خالی پیدا می کنند. به چند طریق می توانند روی این ۷ صندلی بنشینند.

حل)نفر اول روی هر کدام از صندلی ها می تواند بنشیند (۷ صندلی). نفر دوم روی ۶ صندلی (۶ طریق) و به همین ترتیب نفر پنجم روی سه صندلی باقی مانده می تواند بنشیند. لذا جواب ۲۵۲۰ =۳× ۴× ۵× ۶× ۷ است.

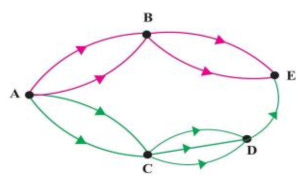
دقت کنیم :در برخی مسائل لازم است از هر دو نوع اصل جمع و ضرب استفاده شود.

مثال:فردی می خواهد از تهران به اصفهان برود او قصد دارد با اتومبیل خود یا با قطار این سفر را انجام دهد. مسیرها و انتخاب های او در شکل زیر مشخص شده است .در کل چند انتخاب دارد؟



حل: اگر با اتومبیل برود، طبق اصل ضرب به ۶ طریق ممکن است و اگر قطار را انتخاب کند سه طریق. لذا طبق اصل جمع در کل ۹ انتخاب دارد.

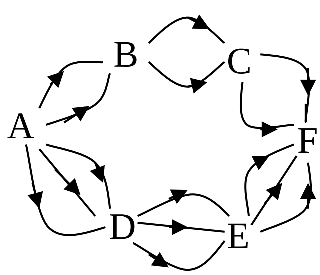
مثال: اگر شکل مقابل نشان دهنده جاده های بین شهری A و B وC وD وE باشد و همه جاده ها یک طرفه باشند، به چند طریق می توان از شهر A به شهر E رفت؟



ABE مسیر:۲×۲=۴
$ACDE$ مسیر:۲×۳×۱=۶

$\xrightarrow{+}$ ۱۰

مثال: اگر شکل مقابل نشان دهنده ی جاده های بین شهرهای FوEوDوCوBو A باشد و همه ی جاده ها یک طرفه فرض شوند، به چند طریق می توان از شهر A به شهر F رفت؟ ۳۵= ۳× ۳× ۳+ ۲×۲×۲

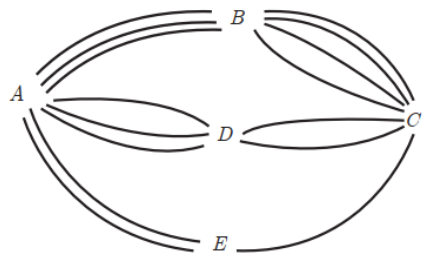


مثال: بین پنج شهر $A،B،C،D،E$ مطابق شکل زیرراههایی وجود داردکه همه دوطرفه اند. مشخص کنیدبه چند طریق میتوان:(تمرین۲ صفحه ۱۰کتاب درسی)

الف) از شهر A به شهر C مسافرت کرد؟

ب) از شهر A به شهر C و از طریق شهر B مسافرت رفت و برگشت انجام داد؟

پ) از شهر D بدون عبور از شهر E به شهر A مسافرت کرد؟



حل) الف:

$$\left.\begin{array}{r} ABC \text{ مسیر} : ۳\times۴=۱۲ \\ ADC \text{ مسیر} : ۳\times۲=۶ \\ AEC \text{ مسیر} : ۲\times۱=۲ \end{array}\right\} \xrightarrow{+} ۲۰$$

ب)

$$\left.\begin{array}{r} ABC \text{مسیر رفت} : ۳\times۴=۱۲ \\ CBA \text{ مسیربرگشت} : ۴\times۳=۱۲ \end{array}\right\} \xrightarrow{\times} ۱۴۴$$

پ)

$$\left.\begin{array}{r} DA \text{ مسیر} : ۳ \\ DCBA \text{ مسیر} : ۲\times۴\times۳=۲۴ \end{array}\right\} \xrightarrow{+} ۲۷$$

پیدا کردن تعداد اعداد دو رقمی ؛ سه رقمی و ... ؛ زوج ؛ فرد ؛ مضرب ۵ و...

برای پیدا کردن تعداد اعداد، مطمئن ترین روش اصل ضرب می باشد.

نکته: همیشه در حل مسائلی که با استفاده از اصل ضرب حل می‌شوند اگر محدودیتی بیـان شـود و تکـرار مجـاز نباشـد حتما بایستی از خانه‌ایی شروع به شمارش حالات کنیم که محدودیت در آنجاست.

تذکر: اگر تکرار مجاز باشد چه محدویت داشته باشیم چه محدودیت نداشته باشـیم از هـر خانـه ای شـروع بـه شـمارش حالات کنیم ایرادی ندارد.

چند محدودیت مهم:

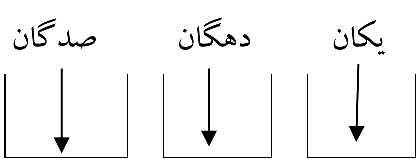
۱) اگر صفر در بین ارقام داده شده باشد، نمی‌توان صفر را در سمت چپ عدد قرار داد.

۲) اگر در بین اعداد داده شده صفر وجود داشته باشد، **به ناچار** باید از اصل ضرب استفاده کنیم.(نمی توان از جایگشت و ترتیب و ترکیب استفاده کرد.)

۳)عددی مضرب ۲ (بخش‌پذیر بر ۲) است، که رقم سمت راست آن ۰، ۲، ۴، ۶ یا ۸ باشد.

۴) عددی مضرب ۵ (بخش‌پذیر بر ۵) است، که رقم سمت راست آن ۰یا ۵ باشد.

مثال الف) با سه رقم ۵و۳و ۲ چند عدد سه رقمی می توان نوشت؟ به طور مثال ۲۳۴ و ۳۵۲ و ۳۳۵ سه نمونه از این اعدادند. برای این کار می توان نوشتن عدد سه رقمی را به صورت پر کردن سه جایگاه مقابل با ارقام مذکور در نظر گرفت.



پس این کار سه مرحله دارد و هر سه مرحله آن باید انجام شود، برای به دست آوردن جواب، تعداد راه های پر کردن هر جایگاه باید مشخص شود و با استفاده از اصل ضرب در هم ضرب شود.

چون تکرار مجاز است از هر خانه ای شروع به شمارش حالات کنیم ایرادی ندارد.

هر جایگاه را به سه حالت می توان پر کرد؛ لذا ۲۷ عدد وجود دارد.

۵یا۳یا۲ ۵یا ۳یا۲ ۵یا۳یا۲

تعداد ۳ × ۳ × ۳ = ۲۷

حالت ها

ب) با همان سه رقم چند عدد سه رقمی می توان ساخت که رقم تکراری نداشته باشد؟

چون محدودیتی نداریم از هر خانه ای شروع به شمارش حالات کنیم ایرادی ندارد.

۱- برای پر کردن جایگاه اول از سمت چپ (صدگان) چند حالت امکان دارد؟

۳ حالت ⟵ تعداد حالت ها

۲- حال فرض کنیم یکی از اعداد را در اولین جایگاه گذاشته ایم. برای پر کردن جایگاه دوم چند حالت امکان دارد؟

یک عدد قرار گرفته است

۲ حالت ⟵ تعداد حالت ها

۳- برای پر کردن جایگاه سوم چند حالت وجود دارد؟

یک عدد قرار گرفته است یک عدد قرار گرفته است

۱ ⟵ تعداد حالت

لذا ۶= ۱ × ۲ × ۳ عدد سه رقمی توسط ۲ و ۳ و ۵ با ارقام غیرتکراری وجود دارد.

ب) با همان سه عدد چند عدد سه رقمی زوج می توان نوشت؟

چون تکرار مجاز است از هر خانه ای شروع به شمارش حالات کنیم ایرادی ندارد.

۱- جایگاه سمت راست به چند روش می تواند پر شود، به گونه ای که عدد ساخته شده زوج باشد؟

در این جایگاه فقط عدد ۲ می تواند قرار بگیرد، لذا ۱ حالت وجود دارد.

۲- دو جایگاه دیگر هر یک به چند روش می توانند، پر شوند؟ در جایگاه های دیگر هر کدام از سه عدد می توانند قرار گیرند، پس هر کدام دارای سه حالت است.

لذا تعداد اعداد در این حالت برابر استـبا ۹ = ۱ × ۳ × ۳

ت) با همان سه عدد چند عدد سه رقمی زوج با ارقام غیر تکراری می توان نوشت؟

چون تکرار مجاز نیست و محدودیت داریم(زوج بودن) بایستی از خانه ای شروع به شمارش کنیم که محدودیت درآنجاست یعنی بایستی از یکان شروع به شمارش حالات کنیم.

۱- جایگاه سمت راست به چند روش می تواند پر شود به گونه ای که عدد ساخته شده زوج باشد؟

در جایگاه سمت راست فقط عدد۲ می تواند باشد پس ۱ حالت داریم

۱ حالت

۲- پس از پر کردن جایگاه سمت راست، جایگاه سمت چپ، به چند طریق می تواند پر شود؟

در جایگاه سمت چپ فقط یکی از اعداد ۳ یا ۵ می توانند باشند پس ۲ حالت داریم

۳- حال جایگاه وسط به چند طریق می تواند پر شود؟

با قرار گرفتن یکی از اعداد ۳ یا ۵ در جایگاه سمت چپ، فقط یک عدد برای جایگاه وسط باقی می ماند، لذا در این جایگاه فقط ۱ حالت داریم.

۴- لذا تعداد اعداد مورد نظر در این حالت برابر است با ۲ = ۱ × ۱ × ۲

مثال: با اعداد ۱و ۲و ۳و ۴و ۵ چند عدد سه رقمی می توان نوشت بطوری که:

الف) تکرار ارقام جایز باشد(ارقام تکراری مجاز باشد).

ب) تکرار ارقام جایز نباشد(ارقام تکراری مجاز نباشد).

ج) عدد زوج و تکرار ارقام جایز باشد.

د) عدد زوج و تکرار ارقام جایز نباشد.

حل:برای حل مسائلی از این قبیل، برای هر رقم یک مکان به صورت مربع در نظر می گیریم و تعداد انتخاب ها و یا تعداد طرقی که می توان در این مربع عدد قرار داد را در زیر آن می نویسیم. در این مثال چون می خواهیم عدد سه رقمی تشکیل دهیم لذا سه مربع در نظر می گیریم که به ترتیب از چپ به راست بیانگر مکان های صدگان، ده گان و یکان عدد سه رقمی است.

الف) ابتدا سه مربع بیانگر مکان های یکان، ده گان و صدگان در نظر می گیریم. چون تکرار ارقام جایز بوده و هیچ گونه محدودیتی روی مکان های یکان و صدگان نداریم (مثلاًدر اعداد داده شده صفر نداریم) لذا تفاوتی نمی کند که شمارش را از چپ(رقم صدگان) و یا از راست (رقم یکان) شروع کنیم. مثلاً فرض کنید شمارش را از چپ (رقم صدگان) شروع کنیم. کاری که می خواهیم انجام دهیم قرار دادن یک عدد از بین آن ۵ عدد در این مکان است(عمل اول). واضح است که این کار را به ۵ طریق می توان انجام داد چون در این مکان می توان اعداد ۱ یا ۲ یا ۳ یا ۴ یا ۵ را قرار داد. حال سراغ رقم ده گان می آییم. کاری که می خواهیم انجام دهیم قرار

دادن یک عدد از بین آن ۵ عدد در این مکان است (عمل دوم). واضح است که این کار را نیز به ۵ طریق می توان انجام داد. حال سراغ رقم یکان می آییم. کاری که می خواهیم انجام دهیم قرار دادن یک عدد از بین آن ۵ عدد در این مکان است(عمل سوم) . واضح است که این کار را نیز به ۵ طریق می توان انجام داد. اما در نهایت کاری که می خواهیم انجام دهیم تشکیل یک عدد سه رقمی است و انجام این کار منوط به انجام عمل اول **و** عمل دوم **و** عمل سوم است لذا این کار را به ۱۲۵=۵×۵×۵ طریق می توان انجام داد. یا تعداد ۱۲۵ عدد سه رقمی با ارقام تکراری می توان تشکیل داد.

□□□
۵ ۵ ۵ $\longrightarrow$ ۵ × ۵ × ۵ = ۱۲۵

ب) در این حالت نیز تفاوتی نمی کند که از سمت چپ (رقم صدگان) و یا سمت راست (رقم یکان) شروع کرد. مثالاً فرض کنید از سمت چپ شروع کنیم. واضح است که کار اول (قرار دادن یک عدد از بین آن ۵ عدد در مکان صدگان) را به ۵ طریق می توان انجام داد. اما چون تکرار ارقام جایز نیست، لذا عددی که در این مکان قرار می گیرد در مکان های ده گان و یکان نمی تواند قرار گیرد و بنابراین کار دوم (مکان ده گان) را به ۴ طریق و کار سوم (مکان یکان) را به ۳ طریق می توان انجام داد. لذا تعداد ۶۰= ۳× ۴ × ۵ عدد سه رقمی بدون تکرار ارقام می توان تشکیل داد.

□□□ $\rightarrow$ ۵ × ۴ × ۳ = ۶۰

ج) چون تکرار ارقام جایز است لذا تفاوتی نمی کند که از چپ (رقم صدگان) و یا از راست (رقم یکان) شروع کرد. منتها باید توجه داشت که چون قرار است عدد زوج باشد لذا در مکان یکان فقط می توان اعداد ۲ یا ۴ را قرار داده و لذا این کار را به دو طریق می توان انجام داد.

□□□ $\rightarrow$ ۵ × ۵ × ۲ = ۵۰

د) چون تکرار ارقام جایز نیست و باید عدد زوج باشد لذا حتماً باید از سمت راست (رقم یکان) شروع کرد. در مکان یکان یا باید ۲ و یا ۴ قرار گیرد(۲ انتخاب) و در مکان ده گان هر کدام از آن ۵ عدد به جز عددی که در مکان یکان قرار گرفته (۴ انتخاب) و در مکان صدگان هر کدام از آن ۵ عدد به جز اعدادی که در مکان های یکان و ده گان قرار گرفته اند (۳ انتخاب).

$$\overleftarrow{\boxed{}\boxed{}\boxed{}} \longrightarrow ۳ \times ۴ \times ۲ = ۲۴$$

توجه

توجه کنید که در حل مسائلی از این قبیل، تا جایی که تکرار ارقام مجاز باشد تفاوتی نمی کند که شمارش را از چپ شروع کرد و یا از راست. اما اگر تکرار ارقام جایز نباشد در این صورت اگر بر روی مکان یکان محدودیت وجود داشته باشد (مانند زوج بودن یا فرد بودن) حتماً باید از سمت راست (مکان یکان) شروع کرد و اگر بر روی مکان صدگان محدودیت وجود داشته باشد (مانند وجود صفر در داده ها) باید از سمت چپ (مکان صدگان) شروع کرد و به طور کلی هنگامی که تکرار ارقام جایز نیست، بر روی هر مکانی که محدودیت وجود داشته باشد باید از همان طرف شروع کرد.

مثال: با اعداد ۰و۱و ۲و ۳و ۴و ۵ چند عدد پنج رقمی بدون تکرار ارقام می توان نوشت ؟ (کاردرکلاس صفحه ی ۶ کتاب درسی)

$$\overset{\text{شروع}}{\longrightarrow}$$

$$\underbrace{\boxed{۵}}_{\substack{(۱)\\۲\\۳\\۴\\۵}} \times \underbrace{\boxed{۵}}_{\substack{(۰)\\۲\\۳\\۴\\۵}} \times \underbrace{\boxed{۴}}_{\substack{(۲)\\۳\\۴\\۵}} \times \underbrace{\boxed{۳}}_{\substack{(۳)\\۴\\۵}} \times \underbrace{\boxed{۲}}_{\substack{۴\\۵}} = ۵ \times ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ = ۶۰۰$$

مثال: با اعداد ۰و۱و ۲و ۳و ۴و ۵ چند عدد پنج رقمی و فرد بدون تکرار ارقام می توان نوشت ؟ (کاردرکلاس

صفحه ی ۶ کتاب درسی)

شروع دوم　　　　　شروع اول

$$\underbrace{\boxed{4}}_{\substack{(2)\\3\\4\\5}} \times \underbrace{\boxed{4}}_{\substack{(0)\\3\\4\\5}} \times \underbrace{\boxed{3}}_{\substack{(3)\\4\\5}} \times \underbrace{\boxed{2}}_{\substack{(4)\\5}} \times \underbrace{\boxed{3}}_{\substack{(1)\\3\\5}} = 4 \times 4 \times 3 \times 2 \times 3 = 288$$

مثال: با استفاده از اعداد مجموعه $\{1,2,4,6,8,9\}$ چند ۵ رقمی و زوج(بدون تکرار ارقام) میتوان ساخت؟

(تمرین ۴ صفحه ۱۱ کتاب درسی)

شروع

$$\underbrace{\boxed{5}}_{\substack{(1)\\4\\6\\8\\9}} \times \underbrace{\boxed{4}}_{\substack{(4)\\6\\8\\9}} \times \underbrace{\boxed{3}}_{\substack{(6)\\8\\9}} \times \underbrace{\boxed{2}}_{\substack{(8)\\9}} \times \underbrace{\boxed{4}}_{\substack{(2)\\4\\6\\8}} = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 4 = 480$$

مثال: ارقام ۱تا ۹ مفروض اند(بدون تکرار ارقام)(نهایی دیماه ۹۷)

الف) چند عدد ۵ رقمی میتوان نوشت؟(کاردرکلاس صفحه ی ۹ کتاب درسی)

ب)چند عدد ۴ رقمی زوج می توان نوشت؟

حل) الف

$$\underbrace{\boxed{9}}_{\substack{(1)\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9}} \times \underbrace{\boxed{8}}_{\substack{(2)\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9}} \times \underbrace{\boxed{7}}_{\substack{(3)\\4\\5\\6\\7\\8\\9}} \times \underbrace{\boxed{6}}_{\substack{(4)\\5\\6\\7\\8\\9}} \times \underbrace{\boxed{5}}_{\substack{(5)\\6\\7\\8\\9}} = 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 15120$$

حل) ب

شروع

$$\underbrace{\boxed{۸}}_{(۱)} \times \underbrace{\boxed{۷}}_{(۳)} \times \underbrace{\boxed{۶}}_{(۴)} \times \underbrace{\boxed{۴}}_{(۲)} = ۸ \times ۷ \times ۶ \times ۴ = ۱۳۴۴$$

(۱)	(۳)	(۴)	(۲)
۳	۴	۵	۴
٤	٥	٦	٦
٥	٦	۷	۸
٦	۷	۸	
۷	۸	۹	
۸	۹		
۹			

مثال: به چند طریق می توان با ارقام ۱ تا ۷ عددی چهار رقمی ساخت؟(تکرار مجاز نیست)(نهایی شهریور ۹۸)

$$\underbrace{\boxed{۷}}_{(۱)} \times \underbrace{\boxed{۶}}_{(۲)} \times \underbrace{۵}_{(۳)} \times \underbrace{\boxed{۴}}_{(۴)} = ۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴ = ۸۴۰$$

(۱)	(۲)	(۳)	(۴)
۲	۳	۴	۵
۳	4	٥	٦
٤	٥	۶	۷
٥	٦	۷	
٦	۷		
۷			

مثال :با اعداد ۰،۱،۲،۳،۴و۵ چند عدد سه رقمی می توان نوشت به طوری که:

الف) تکرار ارقام جایز باشد.

ب) تکرار ارقام جایز نباشد.

ج) عدد زوج و تکرار ارقام جایز باشد.

حل:

در این حالت چون در بین اعداد صفر داریم و صفر یک محدودیت روی مکان صدگان ایجاد می کند(عدد سه رقمی که رقم صدگان آن صفر باشد، عدد دو رقمی است) لذا در حالاتی که تکرار ارقام جایز نباشد حتماً باید از سمت چپ (از سمت رقم صدگان) شروع کرد. اما اگر تکرار ارقام جایز باشد تفاوتی نمی کند که از کدام طرف

شروع کنیم. فلش های قرار داده شده بیانگر آن است که از کدام طرف باید شروع کرد. اگر هم از چپ و هم از راست فلش قرار داده شده باشد بیانگر آن است که تفاوتی نمی کند که از چپ شروع شود و یا از راست.

الف)

۵ ۶ ۶ ⟶ ۵ × ۶ × ۶ = ۱۸۰

ب) در این حالت اولاً از سمت چپ شروع می کنیم و ثانیاً در مکان صدگان نمی تواند ۰ قرار گیرد لذا در این مکان ۵ انتخاب داریم.

۵ ۵ ۴ ⟶ ۵ × ۵ × ۴ = ۱۰۰

ج)

۵ ۶ ۳ ⟶ ۵ × ۶ × ۳ = ۹۰

مثال :با ارقام ۷ و ۳ و ۲ و۰

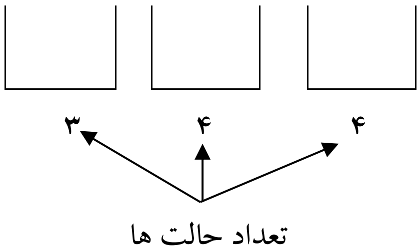
الف) چند عدد سه رقمی می توان نوشت؟

ب) چند عدد سه رقمی با ارقام غیر تکراری می توان نوشت؟

پ) چند عدد سه رقمی فرد با ارقام غیرتکراری می توان نوشت؟

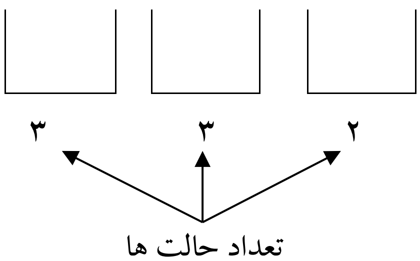
حل:

الف) با توجه به اصل ضرب و چون رقم صفر در جایگاه صدگان نمی تواند باشد، بنابراین تعداد حالت ها مطابق شکل مقابل است.

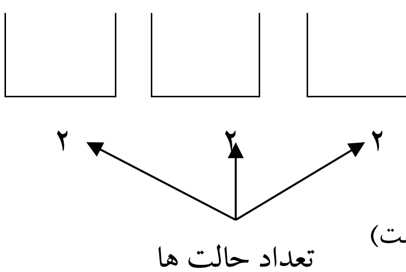


لذا ۴۸ عدد سه رقمی با ارقام مذکور می توان نوشت. ۴۸=۴×۴×۳

ب) طبق اصل ضرب و با توجه به اینکه رقم صفر در سمت چپ نمی تواند بیاید و ارقام نباید تکراری باشند؛ لذا تعداد حالت ها مطابق شکل مقابل است؛ بنابراین ۱۸ عدد می توان نوشت. ۱۸ = ۲ × ۳ ×۳



پ) با توجه به اینکه رقم سمت راست باید ۳ یا ۷ باشد و رقم صفر هم نمی تواند رقم سمت چپ باشد؛ لذا تعداد حالت ها به صورت مقابل است. ۸ = ۲ × ۲ ×۲



مثال : با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳ چند عدد سه رقمی می‌توان نوشت؟ (تکرار ارقام مجازاست)

جواب: (اگر تکرار ارقام مجاز باشد، از هرجا شروع به شمارش حالات کنیم ایراد ندارد.)

$\boxed{۳} \times \boxed{۴} \times \boxed{۴} = ۴۸$

۱	۰	۰
۲	۱	۱
۳	۲	۲
	۳	۳

مثال: چند عدد چهار رقمی بدون رقم ۷ داریم؟

جواب:

$$\underbrace{\boxed{۸}}_{\substack{۱\\۲\\۳\\۴\\۵\\۶\\۸\\۹}} \times \underbrace{\boxed{۹}}_{\substack{۱\\۲\\۳\\۴\\۵\\۶\\۸\\۹}} \times \underbrace{\boxed{۹}}_{\substack{۱\\۲\\۳\\۴\\۵\\۶\\۸\\۹}} \times \underbrace{\boxed{۹}}_{\substack{۱\\۲\\۳\\۴\\۵\\۶\\۸\\۹}} = ۵۸۳۲$$

مثال: چه تعداد عدد چهار رقمی زوج وجود دارد؟

جواب:

$$\underbrace{\boxed{۹}}_{\substack{۱\\۲\\۳\\۴\\۵\\۶\\۷\\۸\\۹}} \times \underbrace{\boxed{۱۰}}_{\substack{۱\\۲\\۳\\۴\\۵\\۶\\۷\\۸\\۹}} \times \underbrace{\boxed{۱۰}}_{\substack{۱\\۲\\۳\\۴\\۵\\۶\\۷\\۸\\۹}} \times \underbrace{\boxed{۵}}_{\substack{۲\\۴\\۶\\۸}} = ۴۵۰۰$$

مثال: چند عدد دو رقمی زوج می توان نوشت؛ به طوری که رقم دهگان آن عددی اول باشد؟

حل: تعداد راه های نوشتن یکان برابر ۵ تاست و تعداد راه های نوشتن دهگان برابر ۴ تاست. لذا با توجه به اصل ضرب ۲۰ عدد با شرایط مورد نظر وجود دارد.

مثال: با ارقام ۰، ۱، ۵، ۷ چند عدد سه رقمی بخش‌پذیر بر ۵ می‌توان نوشت؟(تکرار ارقام مجاز است)

جواب:

$$\underbrace{\boxed{۳}}_{\substack{۱\\۵\\۷}} \times \underbrace{\boxed{۴}}_{\substack{۱\\۵\\۷}} \times \underbrace{\boxed{۲}}_{\substack{۵}} = ۲۴$$

مثال: با ارقام ۲، ۳، ۴، ۰، ۵ چند عدد سه رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

جواب:

$$\underbrace{\boxed{۴}}_{\substack{(۲)\\ ۳\\ ۴\\ ۵}} \times \underbrace{\boxed{۴}}_{\substack{(۳)\\ ۴\\ ۵\\ ۰}} \times \underbrace{\boxed{۳}}_{\substack{۴\\ ۵\\ ۰}} = ۴ \times ۴ \times ۳ = ۴۸$$

مثال: با ارقام عدد ۱و۳و۵و۷و۹ چند عدد چهار رقمی و بزرگتر از ۴۰۰۰ می‌توان نوشت؟(بدون تکرار ارقام)

جواب:

$$\underbrace{\overbrace{\boxed{۳}}^{\text{شروع}}}_{\substack{(۵)\\ ۷\\ ۹}} \times \underbrace{\boxed{۴}}_{\substack{(۷)\\ ۹\\ ۱\\ ۳}} \times \underbrace{\boxed{۳}}_{\substack{(۹)\\ ۳\\ ۱}} \times \underbrace{\boxed{۲}}_{\substack{۱\\ ۳}} = ۳ \times ۴ \times ۳ \times ۲ = ۷۲$$

مثال:با استفاده از ارقام ۱،۲،۴،۶،۸،۹چند عدد ۵ رقمی و بزرگتر از ۸۰۰۰۰ میتوان ساخت؟(بدون تکرار ارقام)

مثال: با استفاده از ارقام ۱و۳و۵و۷و۹ چند عدد چهار رقمی بزرگتر از ۳۰۰۰ و کمتر از ۷۰۰۰ می توان نوشت؟(بدون تکرار ارقام)

جواب:

$$\underbrace{\boxed{۲}}_{\substack{(۳)\\ ۵}} \times \underbrace{\boxed{۴}}_{\substack{(۵)\\ ۷\\ ۹\\ ۱}} \times \underbrace{\boxed{۳}}_{\substack{(۷)\\ ۹\\ ۱}} \times \underbrace{\boxed{۲}}_{\substack{۹\\ ۱}} = ۴۸$$

مثال: با ارقام ۶، ۴، ۱، ۲چند عدد چهار رقمی زوج بدون تکرار ارقام می توان ساخت ؟

جواب:

$$\underbrace{\boxed{۳}}_{\substack{(۱)\\ ۴\\ ۶}} \times \underbrace{\boxed{۲}}_{\substack{(۴)\\ ۶}} \times \underbrace{\boxed{۱}}_{۶} \times \underbrace{\overbrace{\boxed{۳}}^{\text{شروع}}}_{\substack{(۲)\\ ۴\\ ۶}}$$

نکته: هرگاه در طرح مسئله سه شرط زیر لحاظ شده باشد:

شرط ۱: در بین ارقام داده شده، صفر وجود داشته باشد.

شرط۲: تعداد اعداد زوج (مضرب ۲) یا مضرب ۵ (بخشپذیر بر ۵) را از ما بخواهد.

شرط۳: تکرار ارقام مجاز نباشد.

آن را در دو حالت زیر بررسی می‌کنیم.

حالت ۱: فقط رقم صفر در یکان باشد. حالت ۲: رقم صفر در یکان نباشد.

مثال :با اعداد ۵و۴،۳،۲،۱،۰ چند عدد سه رقمی می توان نوشت به طوری که عدد زوج و تکرار ارقام جایز نباشد.**حل**) در این حالت هم بر روی مکان یکان محدودیت داریم(عدد باید زوج باشد) و هم بر روی مکان صدگان محدودیت داریم (عدد صفر نباید در این مکان قرار گیرد). در چنین مواردی طبق نکته بالامسئله را به دو قسمت تقسیم می کنیم به طوری که در هر قسمت تنها یک محدودیت وجود داشته باشد و سپس تعداد شمارش های این دو قسمت را با هم جمع می کنیم.

حالت ۱) رقم یکان آن ها صفر باشد.

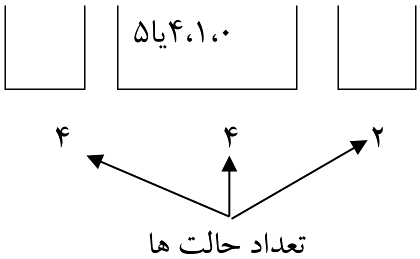
برای مکان یکان فقط یک انتخاب داریم (عدد صفر). حال برای دو مکان باقی مانده تفاوتی نمی کند که از چپ شروع کنیم یا از راست. حالت های جایگاه ها به صورت مقابل است. ۲۰ = ۱ × ۴ × ۵

۵و۴،۳،۲،۱	۵و۴،۳،۲	۰
۵	۴	۱

تعداد حالت ها

حالت دوم: اگر رقم یکان ۲یا ۴ باشد؛ یعنی رقم سمت راست دو حالت می تواند باشد؛ لذا طبق اصل ضرب تعداد حالت ها به صورت مقابل است. ۳۲ = ۲ × ۴ ×۴

۳،۴ ،۱،یا۵ ۲یا ۴



پس تعداد ۵۲ =۳۲ +۲۰ عدد سه رقمی زوج بدون تکرار ارقام می توان تشکیل داد.

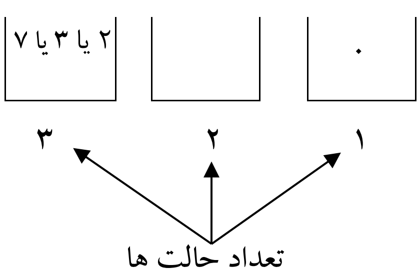
مثال: با اعداد ۰و۱و ۲و ۳و ۴و ۵ چند عدد پنج رقمی و زوج بدون تکرار ارقام می توان نوشت ؟ (کاردرکلاس صفحه ی ۶ کتاب درسی)

جواب:۳۱۲

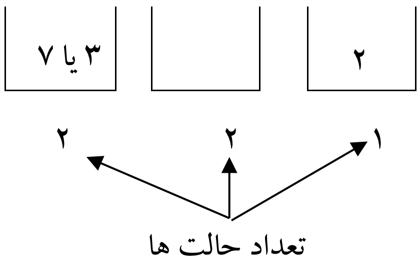
مثال : با ارقام ۷ و ۳ و ۲ و۰ چند عدد سه رقمی زوج با ارقام غیرتکراری می توان نوشت؟

حل) چون عدد مورد نظر باید زوج باشد؛ لذا رقم سمت راست باید ۰ یا ۲ باشد و چون در حالتی که رقم ۲ سمت راست باشد، رقم ۰ سمت چپ هم نمی تواند باشد، لذا باید دو حالت زیر را در نظر بگیریم و طبق اصل جمع تعداد حاصل در دو حالت را با هم جمع کنیم.

حالت اول: اگر رقم سمت راست ۰ باشد، حالت های جایگاه ها به صورت مقابل است. ۶ = ۱ × ۲ × ۳



حالت دوم: اگر رقم سمت راست ۲ باشد؛ یعنی رقم سمت راست یک حالت می تواند باشد؛ لذا طبق اصل ضرب تعداد حالت ها به صورت مقابل است. ۴ = ۱ × ۲ × ۲



لذا در کل ۱۰ حالت می توان نوشت.

مثال: با استفاده از ارقام ۰، ۲، ۴، ۷، ۳ عددی سه رقمی به تصادف می سازیم. در چند حالت عدد ساخته شده زوج است؟

حالت اول: رقم یکان صفر باشد:

$\boxed{٤}\times\boxed{٣}\ \vdots\ \boxed{١} = ١٢$

حالت دوم : رقم یکان صفر نباشد:

$\boxed{٣}\ \boxed{٣}\ \vdots\ \boxed{٢} = ١٨$

کل حالات : $١٢ + ١٨ = ٣٠$

مثال :با اعداد ۰،۱،۳،۵،۶،۷و۸ چند عدد چهار رقمی بخش پذیر بر ۵ می توان تشکیل داد به طوری که در هر عدد رقمی تکرار نگردد.

حل) عددی بر ۵ بخش پذیر است که رقم یکان آن صفر یا ۵ باشد.

$\square\ \square\ \square\ \boxed{۰}$

۶ ۵ ۴ ۱ $\longrightarrow$ ۶ × ۵ × ۴ × ۱ = ۱۲۰

$\square\ \square\ \square\ \boxed{۵}$

۵ ۵ ۴ ۱ $\longrightarrow$ ۵ × ۵ × ۴ × ۱ = ۱۰۰

جواب ۲۲۰ = ۱۰۰ + ۱۲۰

مثال: با اعداد ۰و۱و ۲و ۳و ۴و ۵ چند عدد پنج رقمی و مضرب ۵ بدون تکرار ارقام می توان نوشت ؟

(کاردرکلاس صفحه ی ۶ کتاب درسی)

جواب:۲۱۶

مثال: با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۷ چند عدد چهار رقمی زوج می‌توان نوشت که هیچکدام از رقم‌های آن تکرار نشده باشند؟

جواب:۱۵۶ = ۹۶ + ۶۰

حالت۱:

$\boxed{۵} \times \boxed{۴} \times \boxed{۳} \times \boxed{۱}$

(۱) ۲ ۳ ۴ ۷ | (۲) ۳ ۴ ۷ | ۳ ۴ ۷ | (۰)

حالت۲:

$\boxed{۴} \times \boxed{۴} \times \boxed{۳} \times \boxed{۲} = ۹۶$

(۴) ۱ ۳ ۷ | (۱) ۳ ۷ ۰ | ۳ ۷ ۰ | (۲) ۴

مثال: با ارقام ۰، ۲، ۳، ۵ چند عدد چهار رقمی مضرب ۵ و بدون تکرار ارقام می‌توان ساخت؟ (سراسری ریاضی)

حالت ۱:

$$\underbrace{\boxed{۳}}_{\substack{(۲)\\ ۳\\ ۵}}\times\underbrace{\boxed{۲}}_{\substack{(۳)\\ ۵}}\times\underbrace{\boxed{۱}}_{۵}\times\underbrace{\boxed{۱}}_{۰}=۶$$

حالت ۲:

$$\underbrace{\boxed{۲}}_{\substack{(۲)\\ ۳}}\times\underbrace{\boxed{۲}}_{\substack{(۰)\\ ۳}}\times\underbrace{\boxed{۱}}_{۳}\times\underbrace{\boxed{۱}}_{۵}=۴$$

جواب: $۶+۴=۱۰$

مثال: اگر یک عدد سه رقمی با کنار هم قرار دادن ارقام متمایز ۴، ۳، ۲، ۱، ۰ به وجود آید در چند حالت این عدد زوج است؟

جواب:

$$\left\{\underbrace{\boxed{۴}\,\boxed{۳}\,\boxed{۱}}_{\text{فقط صفر}}+\underbrace{\boxed{۳}\,\boxed{۳}\,\boxed{۲}}_{\text{۲ یا ۴}}\right\}=۳۰$$

فاکتوریل

فاکتوریل: برای عدد صحیح و مثبت n ، n فاکتوریل که آن را به صورت $n!$ نشان می دهیم به صورت زیر تعریف می شود:

$$n! = n(n-۱)(n-۲)\ldots \times ۳ \times ۲ \times ۱$$

مثال:

$$۵! = ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱$$
$$۴! = ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱$$
$$۳! = ۳ \times ۲ \times ۱$$
$$۲! = ۲ \times ۱$$
$$۱! = ۱$$

قرار داد ۱ = !۰

$$۶! = ۶ \times \underbrace{۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱}_{۵!} = ۶ \times ۵!$$

$$۶! = ۶ \times ۵ \times \underbrace{۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱}_{۴!} = ۶ \times ۵ \times ۴!$$

$$۷! = ۷ \times ۶! \qquad ۷! = ۷ \times ۶ \times ۵!$$

$$۷! = ۷ \times ۶ \times ۵ \times ۴!$$

$$۱۰! = ۱۰ \times ۹ \times ۸ \times ۷!$$

مثال :عبارات زیر را ساده کنید:

$$\frac{۶!}{۳!} = \frac{۶\times۵\times۴\times\cancel{۳!}}{\cancel{۳!}} = ۶ \times ۵ \times ۴ = ۱۲۰$$

$$\frac{۱۲!}{۱۰!} = \frac{۱۲\times۱۱\times\cancel{۱۰!}}{\cancel{۱۰!}} = ۱۲ \times ۱۸ = ۱۳۲$$

$$\frac{۵!}{۲!\times۳!} = \frac{۵\times۴\times\cancel{۳!}}{۲\times۱\times\cancel{۳!}} = ۱۰$$

$\frac{۷!}{۲!\times۵!}=\frac{۷\times۶\times۵!}{۲\times۱\times\cancel{۵!}}=۲۱$

مثال: حاصل عبارت های زیر را بدست آورید.

الف) $\frac{۵!}{۴!}=\frac{۵\times\overbrace{۴\times۳\times۲\times۱}^{۴!}}{\underbrace{۴\times۳\times۲\times۱}_{۴!}}=۵$

ب) $\frac{۱۰!}{۹!}=\frac{۱۰\times۹!}{۹!}=۱۰$

ت) $\frac{۸!}{۶!}=\frac{۸\times۷\times۶!}{۶!}=۵۶$

ث) $\frac{۱۰!}{۸!}=\frac{۱۰\times۹\times۸!}{۸!}=۹۰$

چ) $\frac{۸!}{۵!}=\frac{۸\times۷\times۶\times۵!}{۵!}=۳۳۶$

ح) $\frac{۱۰!}{۷!}=\frac{۱۰\times۹\times۸\times۷!}{۷!}=۷۲۰$

مثال: کدام یک از موارد زیر درست و کدام نادرست است؟

$۶!=۳!+۳!$ نادرست

$۶!=۶\times۵!$ درست

$۸!=۴!\times۲!$ نادرست

$۲\times۳!=۶!$ نادرست

$(۳!)^۲=۹!$ نادرست

$۴!=\frac{۸!}{۲!}$ نادرست

جایگشت

جایگشت : نحوه قرار گرفتن اشیا در کنار هم را جایگشت می نامیم.

نکته: تعداد جایگشت‌های nشی متمایز برابر $n!$ است

دقت کنید در سوالاتی از جایگشت که نیاز به کل حالات داریم، از فرمول بالا استفاده می کنیم.

مثال: با حروف کلمه‌ی ستایش چند کلمه‌ی ۵ حرفی می‌توان ساخت؟

جواب: !۵

مثال: با حروف کلمه‌ی ولایت (بدون معنی و با معنی)چند کلمه‌ی ۵ حرفی می‌توان ساخت؟(تمرین ۳ صفحه ی ۱۱ کتاب درسی)

جواب: !۵

مثال: به چند طریق می‌توان ۶ نفر را در یک صف پشت سرهم قرار داد؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۲۴۰ ۳) ۳۶۰ ۴)√ ۷۲۰

جواب: ۷۲۰=!۶

مثال: ۱۰ نامه‌ی مختلف را به چند طریق می‌توان در ۱۰ پاکت مختلف قرار داد؟

جواب: !۱۰

مثال :تعداد روش های چیدن پنج حرف یونانی θوδوγوβوα (به ترتیب آلفا، بتا، گاما، دلتا و تتا خوانده می شوند) کنار هم و بدون تکرار، یا به عبارتی تعداد جایگشت های پنج شی ء متمایز چندتاست؟

۵! = ۵×۴×۳×۲×۱

مثال :تعداد کلمات هفت حرفی (با معنی و بدون معنی) که از کنار هم قرار دادن حروف «ت»،«ش»، «و»، «ا»، «ن»،«پ»و«ه» می توان ساخت چندتاست؟ (بدون تکرار حروف) ۱×۲×۳×۴×۵×۶×۷= !۷

مثال :تعداد جایگشت های ۱۰ شی ء متمایز چندتاست؟ ۱×۲×...×۹×۱۰=!۱۰

قرار گرفتن اشیاءِ در یک جای خاص

مثال : با حروف کلمه « جهانگردی » و بدون تکرار حروف،چند کلمه ۸ حرفی می توان نوشت که به حرف «ی» ختم شوند؟

حل) در حالتی که حرف آخر «ی» باشد، کافی است تعداد جایگشت ها روی هفت حرف دیگر را به دست آوریم؛ لذا در این حالت جواب برابر !۷ است.

مثال: با حروف کلمه‌ی ولایت (بدون معنی و با معنی)چند کلمه‌ی ۳ حرفی می‌توان نوشت که به «ی» ختم شوند؟(تمرین ۳ صفحه ی ۱۱ کتاب درسی)

$$\underset{ی}{\boxed{۱}} \times \boxed{۴} \times \boxed{۳} \Rightarrow ۱ \times ۴ \times ۳ = ۱۲$$

مثال: با حروف کلمه‌ی ولایت (بدون معنی و با معنی)چند کلمه‌ی ۵حرفی می‌توان نوشت که با «و» شروع و به «ل» ختم شوند؟(تمرین ۳ صفحه ی ۱۱ کتاب درسی)

$$\underset{ل}{\boxed{۱}} \times \boxed{۳} \times \boxed{۲} \times \boxed{۱} \times \underset{و}{\boxed{۱}} = ۶$$

مثال: با حروف کلمه‌یcomputer چند کلمه‌ی ۸ حرفی می‌توان ساخت به طوری‌که حروف cو r در اول و آخر کلمه باشند؟

جواب:

$$\underset{c}{\overset{\boxed{۲}}{(r)}} \times \underbrace{\boxed{} \times \boxed{} \times \boxed{} \times \boxed{} \times \boxed{} \times \boxed{}}_{۶!} \times \overset{\boxed{۱}}{c} = ۶! \times ۲$$

انتخاب اشیاء(ترتیب وترکیب)

در انتخاب k از n شیء متمایز دو حالت وجود دارد:

الف) اگر اولویت(تقدم و تاخر) اشیاء مهم باشد این نوع انتخاب را ترتیب می نامند و تعداد حالت های آن را از فرمول زیر به‌دست می آوریم.

$$P\left(n,r\right)=\frac{n!}{(n-r)!}$$

ب) اگر اولویت (تقدم وتاخر) اشیاء مهم نباشد، این نوع انتخاب را ترکیب می نامیم و تعداد حالت های آن از فرمول زیر به‌دست می‌آید:

$$c\left(n,r\right)=\binom{n}{r}=\frac{n!}{(n-r)!\times r!}$$

مثال: با حروف کلمه‌ی فردوسی چند کلمه‌ی ۳ حرفی می‌توان ساخت؟

جواب: $P\left(۶,۳\right)=\frac{۶!}{(۶-۳)!}$

در این مثال تقدم و تاخر اشیاء (حروف) مهم است به عنوان مثال اگر سه حرف (ف – ر- د) را از حروف کلمه فردوسی انتخاب کنیم می‌توان کلمه فرد و درف را باآن ساخت که باهم متفاوتند؛ یعنی با جابجایی حرف کلمه جدیدی ساخته می شود. به همین دلیل از ترتیب استفاده می شود.

مثال: تعداد زیر مجموعه های سه عضوی مجموعه شش عضوی $\{a,b,c,d,e,f\}$ را به‌دست آورید.

جواب: در این مثال تقدم و تاخر اشیا (عضوها) مهم نیست، برای مثال زیرمجموعه های $\{a,b,c\}$ و $\{c,b,a\}$ با هم تفاوت ندارند به همین دلیل از ترکیب استفاده می‌کنیم. $c(۶,۳)=۲۰$

مثال: در کدام یک از موارد زیر، ترتیب قرار گرفتن اشیاء اهمیت دارد و باید تعداد ترتیب r شیء از n شیء متمایز مشخص شود و در کدام یک ترتیب قرار گرفتن اشیا اهمیت ندارد و باید تعداد ترکیب های r تایی از n شیء متمایز مشخص شود؟

الف) ساختن کلمه ای سه حرفی بدون حرف تکراری با ۵ حرف متمایز (با معنی و بی معنی) . ترتیب مهم است.

ب) انتخاب سه شاخه گل از بین پنج شاخه گل متمایز .ترتیب مهم نیست

پ) انتخاب یک دفاع چپ، یک دفاع راست و یک دفاع وسط از بین هفت مدافع که همگی در تمامی پست ها توانایی بازی دارند. ترتیب مهم نیست

ت) از بین هفت بازیکن دفاعی یک تیم سه نفر قرار است از تیم کنار گذاشته شوند. ترتیب مهم نیست

ث) ده نفر در یک دوره مسابقات شرکت خواهند کرد و سه نفر اول به المپیک راه خواهند یافت. ترتیب مهم نیست

ج) ده نفر در یک مسابقه شرکت کرده اند و قرار است به نفرات اول تا سوم به ترتیب مدال های طلا، نقره و برنز داده شود. ترتیب مهم است.

مثال: در هر کدام از موارد «مثال قبل» تعداد حالت های ممکن را بنویسید. (نیاز به ساده کردن جواب نیست)

پ) $P(۷و۳)$ ب) $\binom{۵}{۳}$ الف) $P\left(۵و۳\right)$

ج) $P(۱۰و۳)$ ث) $\binom{۱۰}{۳}$ ت) $\binom{۷}{۳}$

روش سریع محاسبه ترکیب

$$\binom{\boxed{۵}}{\boxed{۳}}=\frac{۵\times۴\times۳}{۳\times۲\times۱} \quad و \quad \binom{\boxed{۱۰}}{\boxed{۱}}=\frac{۱۰}{۱} \quad و \quad \binom{\boxed{۵}}{\boxed{۲}}=\frac{۵\times۲}{۲\times۱}$$

$$\binom{\boxed{۶}}{\boxed{۳}}=\frac{۶\times۵\times۴}{۳\times۲\times۱} \quad و \quad \binom{\boxed{۱۰}}{\boxed{۲}}=\frac{۱۰\times۹}{۲\times۱} \quad و \quad \binom{\boxed{۵}}{\boxed{۵}}=\frac{۵\times۴\times۳\times۲\times۱}{۵\times۴\times۳\times۲\times۱}$$

مثال: هفت نقطه روی دایره ای قرار دارند، حساب کنید که با این هفت نقطه:

الف)چند پاره خط ایجاد می‌شود؟

جواب: $C(۷و۲)$

ب)چند مثلث ایجاد می‌شود؟

جواب: $C(۷و۳)$

ج) چند وتر ساخته می‌شود؟

جواب: $C(۷و۲)$

چ)چند چهار ضلعی که هر راس چهار ضلعی واقع بر یک نقطه باشد می توان ساخت؟

جواب: $C(۷و۴)$

مثال: هفت نقطه A وB وC وD وE وF وG روی محیط دایره قرار دارند. چند مثلث مختلف می توان کشید که رئوس آن از این هفت نقطه انتخاب شده باشند؟

$$\binom{۷}{۳} = ۳۵$$

مثال: روی محیط یک دایره۱۲ نقطه وجود دارد مشخص کنید:(تمرین ۷صفحه ۱۱ کتاب درسی)

الف) با این دوازده نقطه چه تعداد مثلث می توان تشکیل داد؟

$$\binom{۱۲}{۳} = \frac{۱۲ \times ۱۱ \times ۱۰}{۳ \times ۲ \times ۱} = ۲۲۰$$

ب) چه تعداد وترمی توان تشکیل داد؟

$$P\left(۱۲و۲\right) = \frac{۱۲!}{۱۰!} = \frac{۱۲ \times ۱۱ \times ۱۰!}{۱۰!} = ۱۳۲$$

مثال: در یک اداره ۱۲ نفر مشغول به کار هستند؛ می خواهیم از بین آن ها:

الف)۳ نفر انتخاب کنیم؛ این کار به چند طریق امکان پذیر است؟

جواب: چون ترتیب انتخاب اعضاء مهم نیست، پس:

$$C = \binom{۱۲}{۳} = \frac{۱۲\times۱۱\times۱۰}{۳\times۲\times۱} = ۲۲۰$$

ب)یک رئیس، یک معاون و یک منشی انتخاب کنیم؛ این کار به چند طریق امکان‌پذیراست.

جواب: چون ترتیب انتخاب اعضاء مهم است، پس:

$$P=\binom{۱۲و۳}{}=\frac{۱۲!}{(۱۲-۳)!}=۱۳۲۰$$

مثال: به چند طریق می توانیم ۳ کتاب از بین ۸ کتاب انتخاب کنیم؟(نهایی شهریور۹۸)

مثال: یک مربی فوتبال قصد دارد برای بازی پیش رو در تیم خود یک دفاع راست، یک دفاع چپ، یک دفاع جلو و یک دفاع عقب قرار دهد. او شش بازیکن دفاعی دارد که می توانند در هر کدام از این چهار پست بازی کنند. در شروع بازی چند حالت برای چیدن این خط دفاعی برای این مربی وجود دارد؟

$$P\left(۶و۴\right)=\frac{۶!}{۲!}=\frac{۶\times۵\times۴\times۳\times۲!}{۲!}=۳۶۰$$

مثال: در یک لیگ فوتبال ۱۸ تیم قرار دارند. در پایان این لیگ تیم های اول تا سوم به چند حالت مختلف می توانند مشخص شوند؟

$$P\left(۱۸و۳\right)=\frac{۱۸!}{۱۵!}=\frac{۱۸\times۱۷\times۱۶\times۱۵!}{۱۵!}=۴۸۹۶$$

مثال: یک دوره بازی فوتبال بین ۱۰ تیم فوتبال، به صورت رفت و برگشت انجام می شود.اگر همه ی تیم ها با هم بازی داشته باشند،در پایان دوره چند بازی انجام شده است؟(تمرین ۴ صفحه ی ۱۱ کتاب درسی)

$$P\left(۱۰و۲\right)=\frac{۱۰!}{۸!}=\frac{۱۰\times۹\times۸!}{۸!}=۹۰$$

مثال :به چند طریق می توان از بین ۵ فوتبالیست، یک دروازه بان و یک کاپیتان انتخاب کرد.

حل)چون مکان این دو نفر دارای ارزش است (یک نفر دروازه بان و دیگری کاپیتان) لذا باید تعداد همه صف ها یا ترتیب های دوتایی این ۵ نفر را حساب کرد.

$$P_{۵و۲}=\frac{۵!}{(۵-۲)!}=۲۰$$

مثال : از میان شش کتاب مختلف

الف) به چند طریق می توانیم چهار کتاب را در یک قفسه کنار هم بچینیم؟

ب) به چند طریق می توانیم چهار کتاب را برای هدیه دادن به یک نفر انتخاب کنیم؟

حل:الف) چون ترتیب چیدن کتاب ها در قفسه مهم است لذا جواب برابر است با تعداد جایگشت های چهارتایی از شش شیء متمایز؛ یعنی $P\left(۶و۴\right) = \frac{۶!}{(۶-۴)!} = ۳۶۰$

ب) چون ترتیب انتخاب کتاب ها اهمیت ندارد لذا فقط باید تعداد انتخاب های چهار شیء از شش شیء متمایز؛ یعنی تعداد زیر مجموعه های چهارتایی از شش شیء متمایز را محاسبه کرد که برابر است با:

$$\binom{۶}{۴} = \frac{۶!}{(۶-۴)!\,۴!} = ۱۵$$

مثال: میخواهیم از بین ۱۰ دانش آموز کلاس دهم و ۱۱ دانش آموز کلاس یازدهم و ۱۲ دانش آموز کلاس دوازدهم یک دانش آموز انتخاب کنیم ؛ به چند طریق می توانیم این دانش آموز را انتخاب کنیم؟(تمرین ۱ صفحه ی ۱۰کتاب درسی)

$$\binom{۳۳}{۱} = \frac{۳۳}{۱} = ۳۳$$

مثال :از بین ۶ دانشجوی مدیریت و ۳ دانشجوی حسابداری چند کمیته ۵ نفره می توان تشکیل داد به طوری که:

الف) رشته مهم نباشد.

ب) ۳ دانشجوی مدیریت و ۲ دانشجوی حسابداری در این کمیته باشد.

ج) دست کم یک نفر دانشجوی حسابداری در این کمیته باشد.

حل)توجه کنید که چون می خواهیم یک کمیته تشکیل دهیم و یک کمیته در واقع یک گروه است لذا باید از فرمول ترکیب استفاده کرد.

الف) چون رشته مهم نیست لذا مجموعاً ۹ شیء متمایز داریم که می خواهیم از بین آن ها یک دسته ۵ تایی انتخاب کنیم. تعداد همه دسته ها یا ترکیب های ۵ تایی ۹ شی متمایز نبز برابر است با

$$c_{۹و۵} = \binom{۹}{۵} = \frac{۹!}{۵!\,(۹-۵)!} = \frac{۹\times۸\times۷\times۶\times۵!}{۵!\,۴!} = ۱۲۶$$

ب) ابتدا از بین ۶ دانشجوی مدیریت تعداد ۳ نفر را انتخاب می کنیم که این کار را به $\binom{۶}{۳}$ می توان انجام داد و سپس از بین ۳ دانشجوی حسابداری ۲ نفر را انتخاب می کنیم که این کار را به $\binom{۳}{۲}$ می توان انجام داد. لذا جواب $\binom{۶}{۳}\times\binom{۳}{۲} = ۲۰\times۳ = ۶۰$ است.

ج) حداقل یک نفر دانشجوی حسابداری یعنی در این کمیته باید یک نفر دانشجوی حسابداری (و در نتیجه ۴ نفر دانشجوی مدیریت) باشد که جواب $\binom{۶}{۴}\binom{۳}{۱}$ است.

یا دو نفر دانشجوی حسابداری (و در نتیجه ۳ نفر دانشجوی مدیریت) باشد که جواب $\binom{۶}{۳}\binom{۳}{۲}$ است. یا سه نفر دانشجوی حسابداری (و در نتیجه ۲ نفر دانشجوی مدیریت) باشد که جواب $\binom{۶}{۲}\binom{۳}{۳}$ است.

لذا جواب $\binom{۶}{۲}\binom{۳}{۳}+\binom{۶}{۳}\binom{۳}{۲}+\binom{۶}{۴}\binom{۳}{۱} = ۴۵+۶۰+۱۵ = ۱۲۰$ است.

مثال :از بین ۸ نفر دانش آموز که دو نفر از آن ها برادر هستند به چند طریق می توان کمیته ای ۵ نفره تشکیل داد به طوری که :

الف) فقط یک نفر از دو برادر در این کمیته باشد.

ب) هر دو برادر در کمیته باشند.

حل الف) ابتدا از بین دو برادر یک نفر را انتخاب می کنیم $\left[\binom{۲}{۱}\right]$و سپس از بین ۶ نفر باقی مانده ۴ نفر را انتخاب می کنیم$\left[\binom{۶}{۴}\right]$ لذا جواب $۳۰ = ۱۵ \times ۲ = \binom{۶}{۴}\binom{۲}{۱}$ است.

ب) ابتدا هر دو برادر را در کمیته قرار می دهیم $\left[\binom{۲}{۲} = ۱\right]$ و سپس از بین ۶ نفر باقی مانده ۳ نفر را انتخاب می کنیم $\left[\binom{۶}{۳}\right]$ لذا جواب $۲۰ = \binom{۶}{۳}\binom{۲}{۲}$ است

مثال: به چند طریق می‌توان یک کمیته از میان ۵ دانش‌آموز و ۴ دانشجو انتخاب کرد، به طوری که در هر کمیته ۲ دانش‌آموز و ۳ دانشجو عضویت داشته باشد؟ جواب: $\binom{۵}{۲} \times \binom{۴}{۳} = ۱۰ \times ۴ = ۴۰$

مثال: به چند طریق از بین ۵ زن و ۴ مرد، انجمنی ۳ نفری می‌توان تشکیل داد به طوری‌که:

الف) فقط یک نفر آن ها زن باشد.

جواب: یعنی یکی از زنها و دوتا از مردها $\binom{۵}{۱}\binom{۴}{۲}$

ب) هر سه نفر همجنس باشند.

جواب: یعنی هر سه مرد باشند یا هرسه زن $\binom{۵}{۳} + \binom{۴}{۳}$

پ) حداقل یک نفر آن ها مرد باشد.

جواب: یعنی یا یکی از مردها انتخاب بشه، یا دوتا، و یا هرسه تا مرد باشند. پس داریم:

$$\binom{۴}{۱}\binom{۵}{۲} + \binom{۴}{۲}\binom{۵}{۱} + \binom{۴}{۳}\binom{۵}{۰}$$

ت) حداکثر دو نفر آن ها زن باشد.

جواب: یعنی یا دو تا از آن‌ها زن باشه یا یکی، و یا هیچکدام از آن‌ها

$$\binom{۵}{۲}\binom{۴}{۱} + \binom{۵}{۱}\binom{۴}{۲} + \binom{۵}{۰}\binom{۴}{۳}$$

مثال: از بین ۵ دانش آموز رشته تجربی و ۳ دانش آموز ریاضی، به چند طریق می توان سه نفر را برای کار در آزمایشگاه انتخاب کرد، به طوری که لااقل دو نفراز آن ها دانش‌آموز تجربی باشند؟

جواب: $\binom{۵}{۲}\binom{۳}{۱} + \binom{۵}{۳}\binom{۳}{۰} = ۱۰ \times ۳ + ۱۰ \times ۱ = ۴۰$

مثال: در آزمایشگاهی ۳ موش سفید و ۵ موش سیاه نگهداری می شوند. اگر به طور تصادفی ۴ موش از بین آن ها جهت آزمایشی برداشته شوند، درچند حالت فقط یکی از موش های مورد آزمایش سفید است؟ جواب: $\binom{۵}{۳} \times \binom{۳}{۱}$

مثال: میخواهیم از بین ۵ دانش آموز پایه ی یازدهم و ۶ دانش آموز پایه ی دوازدهم افرادی را انتخاب کنیم و یک تیم ۶ نفره والیبال تشکیل دهیم مشخص کنید به چند طریق می توانیم این تیم را تشکیل دهیم ؛ هرگاه بخواهیم: ؟(تمرین ۸ صفحه ی ۱۱کتاب درسی)

الف) به تعداد مساوی دانش آموز پایه ی یازدهم و پایه ی دوازدهم در تیم حضور داشته باشند.

$$\binom{۵}{۳}\times\binom{۶}{۳}$$

پ) حداقل ۴ نفر از اعضای تیم، دانش آموزپایه ی دوازدهم باشند.

$$\binom{۶}{۴}\times\binom{۵}{۲}+\binom{۶}{۵}\times\binom{۵}{۱}+\binom{۶}{۶}\times\binom{۵}{۰}$$

ت)فقط ۲ نفر از اعضای تیم ازپایه ی یازدهم باشند.

$$\binom{۵}{۲}\times\binom{۶}{۴}$$

تعداد زیر مجموعه های یک مجموعه

نکته: تعداد زیر مجموعه‌های k عضوی از یک مجموعه‌ی n عضوی برابر است با: $\binom{n}{k}$

مثال: تعداد زیر مجموعه‌های ۴ عضوی از مجموعه‌ی $\{۱،۲،۳،۴،۵،۶\}$ کدام است؟

۱) ۹ ۲) ۱۲ ۳) ۱۵ √ ۴) ۱۶

جواب: $\binom{۶}{۴}=\frac{۶\times۵\times۴\times۳}{۴\times۳\times۲\times۱}=۱۵$

مثال: تعداد زیر مجموعه‌های زوج عضوی از مجموعه‌ی $\{۱،۲،۳،۴،۵،۶\}$ کدام است؟

جواب: $\binom{۶}{۶}+\binom{۶}{۴}+\binom{۶}{۲}+\binom{۶}{۰}$

مثال: مجموعه ی هشت عضوی $\{۱و۲و۳و ... و۸\}$ ، چند زیرمجموعه ی سه عضوی دارد؟ (نهایی خرداد۹۸ و کاردرکلاس ۳ صفحه ی ۱۰ کتاب درسی)

$$\binom{۸}{۳}=\frac{۸\times۷\times۶}{۳\times۲\times۱}=۵۶$$

مثال: مجموعه ی پنج عضوی $\{۱و۲و۴و۶و۸\}$ ، چند زیرمجموعه ی دو عضوی دارد؟ (نهایی دیماه۹۸)

$$\binom{۵}{۲}=\frac{۵\times۴}{۲\times۱}=۱۰$$

مثال: مجموعه $\{۱،۲،۴،۶،۸،۹\}$ چند زیرمجموعه ی سه عضوی دارد؟

(تمرین ۶ صفحه ۱۱ کتاب درسی)

$$\binom{۶}{۳}=\frac{۶\times۵\times۴}{۳\times۲\times۱}=۲۰$$

ترکیب خاص (شامل)

نکته: اگر بخواهیم از بین n شیءِ r شیءِ را برداریم به طوری که حتماشامل m انتخاب اجباری باشد، تعداد انتخاب‌ها از رابطه‌ی مقابل به‌دست می‌آید: $\binom{n-m}{r-m}$

مثال: مجموعه {۱،۲،۴،۶،۸،۹} چند زیرمجموعه ی سه عضوی و شامل رقم ۸ دارد؟
(تمرین ۶ صفحه ۱۱ کتاب درسی)

$$\binom{۶-۱}{۳-۱}=\binom{۵}{۲}=\frac{۵\times۴}{۲\times۱}=۱۰$$

مثال: از میان ۸ نفر دانش‌آموزان یک کلاس به چند طریق می‌توان ۳ نفر را برای تیم فوتبال انتخاب کرد به طوری که شخص به خصوصی حتما در میان آن ها باشد؟

۱) ۵۶ ۲) ۲۱ √ ۳) ۲۸ ۴) ۳۵

جواب: $\binom{۸-۱}{۳-۱}=\binom{۷}{۲}=\frac{۷\times۶}{۲\times۱}=۲۱$

مثال: تعداد زیر مجموعه سه عضوی مجموعه {f و e و d و c و b و a} که شامل a باشدرا به دست آورید.

جواب: $\binom{۵}{۲}=\frac{۵\times۴}{۲\times۱}=۱۰$

مثال: میخواهیم از بین ۵ دانش آموز پایه ی یازدهم و ۶ دانش آموز پایه ی دوازدهم افرادی را انتخاب کنیم و یک تیم ۶ نفره والیبال تشکیل دهیم مشخص کنید به چند طریق می توانیم این تیم را تشکیل دهیم ؛ به طوری که کاپیتان تیم فرد مشخصی از پایه ی دوازدهم باشد. ؟(تمرین ۸ صفحه ی ۱۱کتاب درسی)

$$\binom{۱۱-۱}{۶-۱}=\binom{۱۰}{۵}$$

درس دوم: احتمال

مفاهیم اولیه احتمال

پدیده (آزمایش) تصادفی: پدیده ها یا آزمایش هایی را که نتیجه آن به طور دقیق قابل پیش بینی نباشد، اما از همه ی حالت های ممکن در به وقوع پیوستن آنها، مطلع باشیم پدیده ها یا آزمایش های تصادفی می نامیم

مثال: نتیجه یک بازی فوتبال از قبل به طور دقیق قابل پیش بینی نیست اما سه حالت پیروزی، تساوی و باخت برای هر یک از تیم ها وجود دارد که ممکن است اتفاق بیفتد.