

جبر و معادله

فصل اول حسابان (۱) پایه یازدهم ریاضی فیزیک

طبقه بندی سوالات به صورت موضوعی 

پاسخ کاملا تشریحی سوالات کنکور سراسری 

حل تمام تمرین ها ' فعالیت ها و کاردر کلاس ها 

مؤلف:

حبيب هاشمی

درس اول

مجموع جملات دنباله های حسابی و هندسی

یادآوری دنباله حسابی (عددی)

تعریف دنباله حسابی: دنباله ای که در آن هر جمله (به جز جمله اول) با اضافه شدن عددی ثابت به جمله ی قبل از خودش به دست می آید. به عبارت دیگر؛ تفاضل جملات متوالی آن عددی ثابت است. به آن عدد ثابت، قدر نسبت دنباله می گویند و آن را با d نشان می دهیم.

نکته: قدر نسبت دنباله ی حسابی از رابطه ی زیر به دست می آید:

$$d = t_n - t_{n-1} \quad (\text{تفاضل دو جمله متوالی})$$

$$d = t_r - t_1$$

مثال: در دنباله های حسابی زیر با مشخص کردن قدر نسبت، سه جمله ی بعدی را بنویسید.

الف) $5, 10, 15, 20, \boxed{25}, \boxed{30}, \boxed{35}, \dots$, $d = 10 - 5 = 5$

ب) $13, 7, 1, -5, \boxed{-11}, \boxed{-17}, \boxed{-23}, \dots$, $d = 7 - 13 = -6$

پ) $5, 5, 5, 5, \boxed{5}, \boxed{5}, \boxed{5}, \dots$, $d = 5 - 5 = 0$

نکته: با توجه به مثبت؛ منفی و یا صفر بودن قدرنسبت می توان نوع دنباله حسابی را مشخص کرد؛

$$d > 0 \rightarrow \text{صعودی (افزایشی)}$$

$$d < 0 \rightarrow \text{نزولی (کاهشی)}$$

$$d = 0 \quad \text{دنباله ثابت}$$

ساختار کلی جمله عمومی دنباله حسابی

$$t_1, \xrightarrow{+d} \underbrace{t_1 + d}_{t_2}, \xrightarrow{+d} \underbrace{t_1 + 2d}_{t_3}, \xrightarrow{+d} \underbrace{t_1 + 3d}_{t_4}, \xrightarrow{+d} \underbrace{t_1 + 4d}_{t_5}, \dots, \underbrace{t_1 + (n-1)d}_{t_n}$$

نکته: جمله ی n ام یا جمله عمومی یک دنباله ی حسابی با جمله ی اول t_1 و قدرنسبت d به صورت زیر است.

$$t_n = t_1 + (n - 1)d$$

دقت کنیم به جای حرف t می توان از حروف دیگر نیز استفاده کرد.

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$b_n = b_1 + (n - 1)d$$

مثال: در دنباله های حسابی زیر جمله ی عمومی هر کدام را به دست آورید.

حل: دقت کنید برای مشخص کردن جمله عمومی به جمله ی اول و قدرنسبت نیاز داریم.

الف) $5, 9, 13, 17, 21, 25, \dots$ $c_1 = 5, d = 4, c_n = 5 + (n - 1) \times 4 = 4n + 1$

ب) $13, 7, 1, -5, -11, \dots$ $e_1 = 13, d = -6, e_n = 13 + (n - 1) \times (-6) = -6n + 19$

مثال: در دنباله ی حسابی زیر جمله ی شانزدهم را به دست آورید.

۴, ۱۱, ۱۸, ۲۵, ...

حل:

$$t_n = t_1 + (n - 1)d$$

$$t_{16} = t_1 + 15d$$

$$= 4 + (15)(7) = 109$$

تست: چندمین جمله از دنباله ی حسابی ... ۲, ۵, ۸, برابر ۵۶ است؟

۱۸(۱) ۱۹(۲) ۲۰(۳) ۲۱(۴)

$$a = 2$$

$$d = 3$$

$$a_n = 56$$

$$n = ?$$

$$a_n = a + (n - 1)d \Rightarrow 56 = 2 + (n - 1)(3) \Rightarrow n = 18$$

به دست آوردن خواسته سوال با داشتن دو جمله دلخواه از دنباله

نکته: اگر a_n, a_m دو جمله ی دلخواه از یک دنباله حسابی باشند داریم.

$$a_m = a_n + (m - n)d$$

$$a_n = a_1 + (n - 1)d \text{ حالت خاص}$$

$$a_1, a_2, \boxed{a_3}, a_4, a_5, a_6, \boxed{a_7}, a_8, a_9, \dots$$

$$\text{مثال} \begin{cases} a_v = 19 \\ a_r = 7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_v = a_r + (v - r)d \rightarrow 19 = 7 + 4d \rightarrow d = 3 \\ a_f = a_r + (f - r)d = 7 + (1)(3) = 10 \\ a_{10} = a_v + (10 - v)d = 19 + 3(3) = 28 \\ a_1 = a_r + (1 - r)d = 7 + (-2)(3) = 1 \\ a_5 = a_r + (5 - r)d = a_v + (5 - v)d = 13 \end{cases}$$

مثال: در يك دنباله ی حسابی، جملات سوم و هفتم به ترتیب ۲۰ و ۵۶ است. دنباله را مشخص کنید؛ یعنی با به

دست آوردن جمله ی اول و قدرنسبت، جملات دنباله را بنویسید.

روش اول: استفاده از جمله عمومی

$$\begin{cases} t_r = t_1 + rd \rightarrow t_1 + rd = -20 \\ t_v = t_1 + vd \rightarrow t_1 + vd = 56 \end{cases} \rightarrow 4d = 36 \rightarrow \boxed{d = 9}$$

$$t_1 + 2(9) = 20 \rightarrow t_1 = 2$$

روش دوم: استفاده از نکته بالا

$$\begin{aligned} t_v &= t_r + rd \rightarrow 56 = 20 + 4d \rightarrow d = 9 \\ t_1 &= t_r + (-2)d \rightarrow t_1 = 20 + (-2)(9) = 2 \end{aligned}$$

به دست آوردن خواسته سوال با داشتن جمله عمومی (a_n)

نکته: در هر دنباله حسابی a_n بر حسب n از درجه اول بوده و ضریب n ؛ قدر نسبت دنباله را مشخص می کند.

$$a_n = a_1 + (n - 1)d = a_1 + nd - d \rightarrow a_n = dn + (a_1 - d)$$

مثال: در یک تصاعد عددی جمله ی n ام به صورت $a_n = \frac{3}{2}n - 5$ است مطلوبست الف (جمله اول ب) جمله

دوم پ (قدرنسبت

$$a_1 = \frac{3}{2}(1) - 5 = \frac{3}{2} - 5 = \frac{3-10}{2} = \frac{-7}{2}$$

$$a_2 = \frac{3}{2}(2) - 5 = 3 - 5 = -2$$

$$d = a_2 - a_1 = -2 - \left(-\frac{7}{2}\right) = -2 + \frac{7}{2} = \frac{-4+7}{2} = \frac{3}{2}$$

روش تستی: ضریب n همان قدرنسبت است: $d = \frac{3}{2}$

رابطه بين سه جمله متوالی دنباله حسابی

نکته: هر گاه a, b, c سه جمله ی متوالی از یک دنباله ی حسابی باشند داریم:

$$a, b, c \xrightarrow{a+c=2b} \boxed{b} = \frac{a+c}{2}$$

↓
c, a واسط حسابی (عددی) بين

تست: اگر $a + 14, 21, a$ سه جمله ی متوالی از یک دنباله ی حسابی با جمله ی اول a باشند جمله ی چهارم کدام است؟

- ۲۸(۱)
- ۳۵(۲)
- ۴۳(۳)
- ۴۹(۴)

$$21 = \frac{a + a + 14}{2} \Rightarrow 42 = 2a + 14 \rightarrow 28 = 2a \rightarrow \boxed{a = 14}$$

$$d = 21 - 14 = 7 \rightarrow a_4 = a + 3d = 14 + 3(7) = 35$$

تست: اگر $2p + 3, 3p + 4, 5p - 1$ سه جمله ی متوالی از یک دنباله ی حسابی باشند، قدرنسبت کدام است؟

- ۴(۱)
- ۵(۲)
- ۶(۳)
- ۷(۴)

$$3p + 4 = \frac{2p + 3 + 5p - 1}{2} \Rightarrow 6p + 8 = 7p + 2 \rightarrow -p = -6 \rightarrow p = 6$$

جملات: $2(6) + 3, 3(6) + 4, 5(6) - 1 \rightarrow 15, 22, 29 \rightarrow d = 7$

مثال: اگر اعداد $5, x + 2, x^2 + 1, 3x - 1$ سه جمله ی متوالی یک دنباله حسابی باشند، آنگاه x را بیابید.

$$2(x^2 + 2) = (3x - 1) + (x + 5)$$

$$2x^2 + 4 = 4x + 4 \rightarrow 2x^2 - 4x = 0 \rightarrow 2x(x - 2) = 0 \begin{cases} 2x = 0 \rightarrow x = 0 \\ x - 2 = 0 \rightarrow x = 2 \end{cases}$$

درج m واسطه حسابی

تکنه: برای درج m واسطه ی حسابی بین دو عدد b, a ابتدا با فرمول جمله عمومی قدر نسبت را پیدا کرده، سپس واسطه ها را می نویسیم.

مثال: بین ۱۸ و ۶۲ سه عدد را چنان قرار دهید که پنج عدد حاصل تشکیل دنباله ی حسابی بدهند. در این حالت می گوئیم بین ۱۸ و ۶۲ سه واسطه ی حسابی درج کرده ایم.

حل: با فرض اینکه ۱۸ جمله اول باشد، قدر نسبت را به دست می آوریم و جملات را می نویسیم.

$$\boxed{18}, \underline{\quad}, \underline{\quad}, \underline{\quad}, \boxed{62}$$

$$a_1 \qquad \qquad \qquad a_5$$

$$\begin{cases} a_1 = 18 \\ a_5 = 62 \Rightarrow a_1 + 4d = 62 \Rightarrow 4d = 62 - 18 \Rightarrow d = 11 \end{cases}$$

$$a_1 \xrightarrow{+11} \xrightarrow{+11} \xrightarrow{+11} \xrightarrow{+11} a_5$$

$$18 \quad 29 \quad 40 \quad 51 \quad 62$$

تست: بین دو عدد ۲ و ۲۹ چند واسطه حسابی با قدر نسبت ۳ می توان درج کرد؟

- ۶(۱) ۷(۲) ۸(۳) ۵(۴)

$$2, \dots, \dots, \dots, 29$$

$$a_1 \qquad \qquad \qquad a_n$$

$$a_n = a_1 + (n - 1)d \rightarrow 29 = 2 + (n - 1)(3) \rightarrow n = 10 \Rightarrow m = 10 - 2 = 8$$

سه جمله متوالی یک دنباله

نکته: سه جمله متوالی یک دنباله حسابی را بهتر است به صورت زیر نشان دهیم:

$$a - d, a, a + d$$

مثال: مجموع سه جمله متوالی از یک دنباله حسابی برابر ۲۴ و حاصلضرب آنها ۳۱۲ است، قدر نسبت این دنباله را

یابید.

$$(a - d) + a + (a + d) = 24 \rightarrow 3a = 24 \rightarrow a = 8$$

$$(a - d)(a)(a + d) = 312 \xrightarrow{a=8} (8 - d)(8)(8 + d) = 312$$

$$64 - d^2 = \frac{312}{8} \rightarrow 64 - d^2 = 39 \rightarrow 25 - d^2 = 0$$

$$(25 - d)(25 + d) = 0 \rightarrow \begin{cases} 25 - d = 0 \rightarrow d = 25 \\ 25 + d = 0 \rightarrow d = -25 \end{cases}$$

مثال: مجموع سه جمله متوالی از یک دنباله حسابی برابر ۶ و مجموع مربعات آنها ۳۰ است. آن سه عدد را مشخص کنید.

$$(a - d) + a + (a + d) = 6 \rightarrow 3a = 6 \rightarrow a = 2$$

$$(a - d)^2 + a^2 + (a + d)^2 = 30 \Rightarrow (2 - d)^2 + 2^2 + (2 + d)^2 = 30$$

$$\Rightarrow (4 - 4d + d^2) + (4 + 4d + d^2) = 26$$

$$8 + 2d^2 = 26 \rightarrow 2d^2 = 18 \rightarrow d^2 = 9 \rightarrow d = \pm 3$$

نکته: پنج جمله متوالی یک دنباله حسابی را بهتر است به صورت زیر نشان دهیم:

$$a - 2d, a - d, a, a + d, a + 2d$$

مجموع n جمله ی اول یک دنباله حسابی:

مجموعه اعداد طبیعی ... ۱, ۲, ۳, یک دنباله حسابی با قدر نسبت یک می باشد. چگونگی به دست آوردن مجموع اعداد طبیعی ۱ تا n می تواند الگوی مناسبی باشد تا به یک دستور برای محاسبه مجموع جملات هر دنباله حسابی برسیم.

فعالیت: تعدادی دگمه داریم که به شکل روبه ر و آرایش شده اند. تعداد این دگمه ها چندتاست؟



۱) یکی از راه ها ، شمارش تعداد دگمه ها در هر ردیف است که مجموع آن برابر است با :

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$$

۲) راه دیگر استفاده از شهود و تجسم، با استفاده از شکل پایین، است.



در این شکل تعداد ردیف ها ۱۰ و تعداد دگمه ها در هر ردیف برابر ۱۱ است، پس تعداد کل دگمه ها برابر ۱۱۰

است و چون تعداد دگمه های آبی و قرمز برابر است پس:

$$\text{تعداد کل دگمه ها} = \frac{110}{2} = 55$$

تعداد دگمه های قرمز

۳) برای محاسبه مجموع اعداد طبیعی ۱ تا n مراحل زیر را انجام داده ایم. چگونگی هر مرحله را توضیح دهید.

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n$$

$$S = n + (n-1) + \dots + 3 + 2 + 1$$

$$2S = \underbrace{(n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) + (n+1)}_{n \text{ تا}}$$

$$2S = n(n+1)$$

$$S = \frac{n(n+1)}{2}$$

ابتدا اعداد طبیعی ۱ تا n را نوشته به ترتیب صعودی سپس n تا ۱ را زیر مجموع ۱ تا n قرار می دهیم طوری که

مجموع هر دو عدد زیر هم $n + 1$ می شود و چون کل اعداد n تا هستند حال ما $n + 1$ داریم پس

$2S = n(n + 1)$ می شود.

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

مثال: روی محیط دایره ای ۲۰ نقطه متمایز قرار دارد. از هر نقطه به نقاط دیگر وصل می کنیم. تعداد کل وترهای

تشکیل شده را به دست آورید.

حل: نقطه اول را به هر یک از نقاط دیگر وصل می کنیم در این صورت ۱۹ وتر پدید می آید. با وصل نقطه دوم به

نقاط دیگر (به غیر از نقطه اول) ۱۸ وتر به دست می آید. سپس نقطه سوم را به نقاط دیگر غیر از نقاط اول و دوم

وصل می کنیم. ۱۷ وتر حاصل می شود. با ادامه این عمل تعداد وترهای حاصل برابر است با:

$$۱۹ + ۱۸ + ۱۷ + \dots + ۲ + ۱ = \frac{۱۹}{۲} (۱ + ۱۹) = ۱۹۰$$

فعالیت: دنباله حسابی زیر را، که در آن جمله اول، d قدر نسبت و n تعداد جملات آن است، در نظر بگیرید.

$$a, a + d, a + ۲d, \dots, a + (n - ۲)d, a + (n - ۱)d$$

مجموع جملات این دنباله را S_n می نامیم و می نویسیم:

$$S_n = a + (a + d) + (a + ۲d) + \dots + (a + (n - ۲)d) + (a + (n - ۱)d)$$

حال، جملات S_n را از آخر به اول بنویسید و با جمع جملات متناظر دو عبارت اخیر، $۲S_n$ را به دست آورید.

$$S = a + (a + d) + \dots + (a + (n - ۲)d) + (a + (n - ۱)d)$$

$$S = (a + (n - ۱)d) + (a + (n - ۲)d) + \dots + (a + d) + a$$

$$۲S = \underbrace{(۲a + (n - ۱)d) + (۲a + (n - ۱)d) + \dots + (۲a + (n - ۱)d)}_{n}$$

$$۲S = n[۲a + (n - ۱)d]$$

پس نتیجه خواهیم گرفت:

$$S_n = \frac{n}{۲} [۲a + (n - ۱)d]$$

مثال: نشان دهید در یک دنباله حسابی اگر a_1 و a_n به ترتیب جملات اول و آخر باشند آنگاه:

$$S_n = \frac{n}{۲} (a_1 + a_n)$$

$$S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d] = \frac{n}{2} \left[a + \underbrace{(a + (n-1)d)}_{a_n} \right] = \frac{n}{2} [a + a_n]$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n) \xrightarrow{a_n = a_1 + (n-1)d} S_n = \frac{n}{2} (2a_1 + (n-1)d)$$

↑ جمله ی اول
↑ جمله ی آخر

↑ اگر جمله ی آخر معلوم باشد
↑ اگر قدر نسبت معلوم باشد

مثال: مجموع صد جمله اول دنباله حسابی ... ۱۵, ۱۱, ۷, ۳ را به دست آورید.

حل: جمله اول ۳، تعداد جمله ها ۱۰۰ و قدر نسبت جملات ۴ است. با استفاده از فرمول مجموع جملات دنباله

حسابی می توان نوشت:

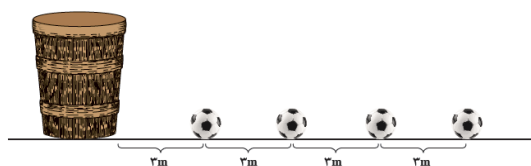
$$S_{100} = \frac{100}{2} [2 \times 3 + (100 - 1) \times 4] = 50 \times 402 = 20100$$

مثال: در یک مسابقه تعداد بسیاری توپ روی یک خط مستقیم و هر یک به فاصله ۳ متر از هم قرار دارند. فاصله

توپ اول تا سبد نیز ۳ متر است (شکل زیر).. دونده ای باید از کنار بید شروع کرده توپ اول را بردارد و آن را تا

سبد حمل کند و به سبد بیندازد، سپس به طرف توپ بعدی بدود و آن را بردارد و به داخل سبد بیندازد و این کار را

ادامه دهد. اگر این دونده در پایان ۹۱۸ متر دویده باشد؛ حساب کنید او جمعاً چند توپ در سبد انداخته است؟



حل: دونده برای برداشتن توپ اول و قرار دادن آن در سبد باید مسافت $3+3=6$ متر را طی کند؛ برای توپ دوم نیز باید ۱۲ متر و برای توپ سوم ۱۸ متر و ... طی کند. بنابراین مسافت های طی شده در این مراحل، تشکیل یک دنباله حسابی با جمله اول ۶ و قدر نسبت ۶ می دهد. اگر n تعداد توپ های انداخته شده در سبد باشد از فرمول مجموع جملات دنباله حسابی داریم:

$$S = \frac{n}{2}(2a + (n - 1)d)$$

$$918 = \frac{n}{2}(12 + (n - 1)6) \Rightarrow 306 = n(n + 1) \Rightarrow 17 \times 18 = n(n - 1) \Rightarrow n = 17$$

تست: در یک دنباله عددی جمله ی n ام به صورت $a_n = \frac{3}{2}n - 5$ است مجموع ۱۵ جمله ی اول این دنباله کدام است؟ (سراسری تجربی ۸۹)

- ۹۰ (۱) ۱۰۵ (۲) ۱۲۰ (۳) ۱۳۵ (۴)

روش اول

$$a_1 = \frac{3}{2}(1) - 5 = -\frac{7}{2} \rightarrow s_{15} = \frac{15}{2} \left(-\frac{7}{2} + \frac{35}{2} \right) = \frac{15}{2} \left(\frac{28}{2} \right) = 105$$

$$a_{15} = \frac{3}{2}(15) - 5 = \frac{35}{2}$$

روش دوم

$$a_1 = -\frac{7}{2} \rightarrow \begin{cases} s_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n - 1)d) \\ s_{15} = \frac{15}{2} \left(2 \left(-\frac{7}{2} \right) + (15 - 1) \left(\frac{3}{2} \right) \right) \end{cases}$$

$$= \frac{15}{2}(-7 + 21) = \frac{15}{2}(14) = 105$$

تست: در یک تصاعد عددی جمله ی پنجم برابر ۳ و هر جمله از جمله ی ما قبل خود به اندازه ی

$\frac{1}{2}$ کمتر است. مجموع ۱۰ جمله ی اول آن کدام است؟ (سراسری تجربی)

۳۰ (۴)

۲۷/۵ (۳)

۲۵ (۲)

۲۲/۵ (۱)

$$a_5 = 3$$

$$d = -\frac{1}{4} \rightarrow a_5 = a_1 + 4d \rightarrow 3 = a_1 + 4\left(-\frac{1}{4}\right) \rightarrow \boxed{a_1 = 5}$$

$$s_{10} = \frac{10}{4} \left(2(5) + (10 - 1) \left(-\frac{1}{4}\right) \right)$$

$$= 5 \left(10 - \frac{9}{4} \right) = 5 \left(\frac{31}{4} \right) = 27/5$$

مثال : حاصل عبارت های زیر را بدست آورید

۱ + ۲ + ۳ + ... + n = ?

a₁ = ۱

الف) d = ۱

تعداد = n

s_n = ?

$$s_n = \frac{n}{4} (a_1 + a_n) = \frac{n}{4} (1 + n) = \frac{n(n+1)}{4}$$

۲, ۴, ۶, ... ۲n = ?

ب) a₁ = ۲

d = ۲

تعداد = ?

s_n

$$s_n = \frac{n}{4} (a_1 + a_n) = \frac{n}{4} (2 + 2n) = n(1 + n) = n + n^2$$

۱, ۳, ۵, ..., (۲n - ۱) = ?

ج) a₁ = ۱

d = ۲

تعداد = n

s_n

$$s_n = \frac{n}{4} (a_1 + a_n) = \frac{n}{4} (1 + 2n - 1) = n^2$$

مثال : مقدار x از معادله ۱ + ۳ + ۵ + ... + x = ۲۲۵

$$\text{روش اول} \begin{cases} s_n = 225 \rightarrow \frac{n}{4} (2(1) + (n - 1)(2)) = 225 \\ \frac{n}{4} (2 + 2n - 2) = 225 \\ n^2 = 225 \rightarrow \boxed{n = 15} \end{cases}$$

$$a_{15} = 1 + 14(2) = 29$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = n^2 \rightarrow n^2 = 225 \rightarrow n = 15 \rightarrow x = 2n - 1 = 29$$

تست: در بیست جمله اول از یک تصاعد حسابی مجموع جملات ردیف فرد ۱۳۵ و مجموع جملات ردیف زوج

۱۵۰ می باشد جمله ی اول کدام است؟

$$0(1) \quad 1(2) \quad 2(3) \quad 3(4)$$

$$\underbrace{a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{19}}_{10 \text{ تا}} = 135 \rightarrow \frac{10}{2}(a_1 + a_{19}) = 135 \rightarrow a_1 + a_1 + 18d = 27 \rightarrow 2a_1 + 18d = 27$$

$$a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{18} = 150 \rightarrow \frac{10}{2}(a_2 + a_{18}) = 150 \rightarrow a_1 + d + a_1 + 17d = 30 \rightarrow 2a_1 + 17d = 30$$

$$\begin{cases} 2a_1 + 18d = 27 \\ 2a_1 + 17d = 30 \end{cases} \rightarrow a_1 = 0, \quad d = 1/5$$

تست: مجموع تمام اعداد طبیعی بخشپذیر بر ۶ بین دو عدد ۱۰۰ و ۲۰۰ کدام است (سراسری تجربی)

$$2550(4) \quad 2520(3) \quad 2450(2) \quad 2420(1)$$

حل: با روش آزمون و خطا جمله اول و آخر را به دست می آوریم سپس به کمک جمله عمومی تعداد جملات را

به دست می آوریم و در فرمول مجموع جملات قرار می دهیم

$$a_n = a + (n-1)d \rightarrow 198 = 102 + (n-1)(6) \rightarrow n-1 = \frac{198-102}{6} = 16 \rightarrow n = 17$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{17}{2}[102 + 198] = 2550$$

مثال: مجموع همه اعداد طبیعی سه رقمی که مضرب شش هستند چقدر می شود؟

$$۱۰۲ \text{ و } ۱۰۸ \text{ و } \dots \text{ و } ۹۹۶ \quad a = ۱۰۲ \quad a_n = ۹۹۶$$

$$a_n = a + (n - 1)d \rightarrow ۹۹۶ = ۱۰۲ + (n - 1)(۶) \rightarrow n - 1 = \frac{۹۹۶ - ۱۰۲}{۶} = ۱۴۹ \rightarrow n = ۱۵۰$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{۱۵۰}{2}[۱۰۲ + ۹۹۶] = ۸۲۳۵۵$$

مثال: مجموع همه اعداد طبیعی دو رقمی مضرب ۴ را به دست آورید.

$$\underbrace{۱۲, ۱۶, ۲۰, \dots, ۹۶}_{a \quad a_n}$$

$$a_n = a + (n - 1)d \rightarrow ۹۶ = ۱۲ + (n - 1)(۴) \rightarrow n - 1 = \frac{۹۶ - ۱۲}{۴} = ۲۱ \rightarrow n = ۲۲$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{۲۲}{2}[۱۲ + ۹۶] = ۱۱۸۸$$

تمرین: مجموع اعداد طبیعی فرد، بخشپذیر بر ۳ و کوچکتر از ۱۰۱ کدام است (سراسری تجربی ۸۵)

$$۸۱۶(۴) \quad ۸۶۷(۳) \quad ۸۵۲(۲) \quad ۸۱۶(۱)$$

تست: در دنباله ی عددی ... -۹, -۱۲, -۱۵- مجموع جملات طبیعی دو رقمی کدام است؟

$$۶۰۹۰(۴) \quad ۶۰۹۵(۳) \quad ۶۱۰۰(۲) \quad ۶۱۰۵(۱)$$

گزینہ ۱

مثال: در یک دنباله ی حسابی با جمله ی اول $\frac{3}{4}$ و قدر نسبت ۱- مجموع چند جمله برابر ۶- است.

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{3}{4} \\ d &= -1 \\ s_n &= -6 \\ n &=? \end{aligned}$$

$$s_n = \frac{n}{4}(2a_1 + (n-1)d) =$$

$$-6 = \frac{n}{4}\left(2\left(\frac{3}{4}\right) + (n-1)(-1)\right)$$

$$-6 = \frac{n}{4}(3 - n + 1)$$

$$-6 = \frac{n}{4}(4 - n) \xrightarrow{\times 4} -12 = 4n - n^2$$

$$\rightarrow n^2 - 4n - 12 = 0 \Rightarrow (n-6)(n+2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n = 6 \\ n = -2 \end{cases} \text{ غ ق ق طبیعی است.}$$

مثال: مجموع چند جمله ای دنباله ی حساب ... ۱۰, ۱۲ برابر صفر است؟

$$\begin{aligned} a_1 &= 12 \\ d &= -2 \\ s_n &= 0 \\ n &=? \end{aligned}$$

$$s_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) =$$

$$0 = \frac{n}{2}(2(12) + (n-1)(-2))$$

$$0 = \frac{n}{2}(24 - 2n + 2)$$

$$0 = \frac{n}{2}(26 - 2n + 2) \Rightarrow n(2n - 2n) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = 0 \text{ ق ق} \\ n = 13 \end{cases}$$

مثال: مجموع چند جمله از جملات دنباله ی حسابی مقابل ۱۶۸ است؟

$$2a - 1, 7a - 9, a + 5$$

$$2(7a - 9) = (2a - 1) + (a + 5) \Rightarrow 14a - 18 = 3a + 4 \rightarrow 11a = 22 \rightarrow \boxed{a = 2}$$

بازنویسی $2(2) - 1, 7(2) - 9, 2 + 5 \rightarrow 3, 5, 7$

$$\rightarrow \begin{cases} a_1 = 3 \\ d = 2 \\ s_n = 168 \\ n = ? \end{cases}$$

مثال: حداقل چند جمله از دنباله ی حسابی ... ۱۱, ۱۵, ۱۹ را جمع کنیم تا حاصل منفی شود؟

$$\begin{cases} a_1 = 19 \\ d = -4 \\ s_n < 0 \\ n = ? \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow s_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d) < 0 &\Rightarrow \frac{n}{2}(2(19) + (n-1)(-4)) < 0 \\ = \frac{n}{2}(38 - 4n + 4) < 0 &\rightarrow \frac{n}{2}(42 - 4n) < 0 \\ \times 2 &\rightarrow n(42 - 4n) < 0 \rightarrow \end{aligned}$$

	0		$\frac{42}{4}$	
n	-	o	+	+
$42 - 4n$	+	+	o	-
	-	+	- جواب	

$$\begin{aligned} n &> \frac{42}{4} \\ n &> 10.5 \\ \boxed{n &\geq 11} \\ n &= 11 \end{aligned}$$

مثال: در دنباله ی حسابی ... ۱, ۳, ۵, ... حداقل چند جمله را باید جمع کرد تا حاصل از ۲۰۰ بزرگتر شود؟

$$\begin{aligned} \Rightarrow s_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d) &> 200 \\ \Rightarrow \frac{n}{2}(2(1) + (n-1)(2)) &> 200 \\ = \frac{n}{2}(2 + 2n - 2) &> 200 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ d = 2 \\ s_n > 200 \\ n = ? \end{cases}$$

$$\frac{n}{2}(2n) > 200 \rightarrow n^2 > 200 \rightarrow \sqrt{\quad} \begin{matrix} n > \sqrt{200} \\ n > 14.14 \dots \\ n \geq 15 \end{matrix}$$

حداقل ۱۵ جمله

مثال: در دنباله حسابی .. ۱۱, ۸, ۵ حداقل چند جمله آن را با هم جمع کنیم تا حاصل آن از ۴۹۳ بیشتر شود؟

$$\begin{aligned} a &= 5 & S_n &> 493 & \frac{n}{2} [10 + 3(n-1)] &> 493 \\ d &= 3 & 3n^2 + 7n - 986 &> 0 & m \\ \Delta &= 11881 \end{aligned}$$

$$n_1 = \frac{-7 + 10.9}{6} \Rightarrow n > 17 \rightarrow n = 18$$

$$n_2 = \frac{-7 - 10.9}{6} = \text{غ ق ق}$$

تست: در یک دنباله حسابی مجموع نه جمله ی اول ۵۴ و مجموع ده جمله ی اول ۵۰ است مجموع چهارده جمله

ی اول این دنباله کدام است؟

$$0. (1) \quad 14 (2) \quad 16 (3) \quad 18 (4)$$

$$\begin{aligned} s_9 &= 54 \rightarrow \frac{9}{2} (2a_1 + 8d) = 54 \rightarrow a_1 + 4d = 6 \\ s_{10} &= 50 \rightarrow \frac{10}{2} (2a_1 + 9d) = 50 \rightarrow a_1 + 4.5d = 5 \rightarrow a_1 = 14, d = -2 \\ s_{14} &= \frac{14}{2} (2a_1 + 13d) = \frac{14}{2} (2(14) + 13(-2)) = 14 \end{aligned}$$

مثال: در یک دنباله ی عددی $a_7 = 29$ و $a_3 = 5$ می باشد مجموع ۲۰ جمله ی اول این دنباله کدام است؟

$$a_7 = a_3 + (7-3)d \rightarrow 29 = 5 + 4d \rightarrow d = 6$$

$$a_7 = a_1 + (7-1)d \rightarrow 29 = a_1 + 6d \rightarrow 29 = a_1 + 36 \rightarrow a_1 = -7$$

$$s_{20} = \frac{20}{2} (2(-7) + 19(6)) = 10(-14 + 114) = 1000$$

تست: در یک تصاعد عددی مجموع ۱۲ جمله ی اول آن ۱۳۸ و جمله ی ششم آن ۱۰ است جمله ی اول این تصاعد

کدام است (سراسری تجربی)

- ۲ (۴)
- ۳ (۳)
- ۴ (۲)
- ۵ (۱)

$$s_{12} = 138 \rightarrow \frac{12}{2}(2a_1 + 11d) = 138 \rightarrow a_1 = -5$$

$$a_6 = 10 \rightarrow a_1 + 5d = 10$$

تست: در یک دنباله ی عددی $s_9 - 6s_6 = 0$ حاصل $\frac{a_{10}}{a_7}$ کدام است؟

- ۳ (۴)
- ۶ (۳)
- ۵ (۲)
- ۷ (۱)

$$s_9 - 6s_6 = 0 \rightarrow \frac{9}{2}(2a_1 + 8d) - 6\left(\frac{6}{2}(2a_1 + 5d)\right) = 0 \rightarrow a_1 = -2d$$

$$\frac{a_{10}}{a_7} = \frac{a_1 + 9d}{a_1 + 3d} = \frac{-2d + 9d}{-2d + 3d} = 7$$

تست: در یک دنباله ی عددی مجموع بیست جمله ی اول سه برابر مجموع دوازده جمله ی اول است. اگر جمله ی

سوم برابر ۶ باشد جمله ی دهم کدام است؟ (سراسری ریاضی ۹۰)

- ۳۸ (۴)
- ۳۶ (۳)
- ۳۴ (۲)
- ۳۲ (۱)

$$\begin{cases} s_{20} = 3s_{12} \Rightarrow \frac{20}{2}(2a_1 + 19d) = 3 \times \frac{12}{2}(2a_1 + 11d) \rightarrow d = -2a_1 \\ a_3 = 6 \rightarrow a_1 + 2d = 6 \rightarrow a_1 + 2(-2a_1) = 6 \rightarrow -3a_1 = 6 \rightarrow \boxed{a_1 = -2} \xrightarrow{d = -2a_1} \boxed{d = 4} \end{cases}$$

$$a_{10} = a_1 + 9d = -2 + 9(+4) = 34$$

مثال: در یک دنباله حسابی $s_{21} = 210$ است جمله ی یازدهم دنباله چقدر است؟

$$s_{21} = \frac{21}{2}(2a_1 + 20d) \Rightarrow s_{21} = \frac{21}{2}(2(a_1 + 10d)) = 21(a_{11})$$

$$\Rightarrow 210 = 21a_{11} \rightarrow a_{11} = 10$$

تست: در يك دنباله ی عددی $a_3 + a_4 + a_5 + a_{12} = 160$ است حاصل جمع یازده جمله ی اول آن چقدر است؟

- (۱) ۲۲۰
- (۲) ۳۳۰
- (۳) ۴۴۰
- (۴) ۵۵۰

$$s_{11} = \frac{11}{2}(2a + 10d) = ? \quad \frac{11}{2}(2(a_1 + 5d)) = 11(a_1 + 5d) = 11 \times 40$$

$$a_3 + a_4 + a_5 + a_{12} = 160 \rightarrow 4a_1 + 20d = 160 \xrightarrow{\div 4} a_1 + 5d = 40$$

به دست آوردن خواسته های سوال با داشتن مجموع n جمله اول دنباله (s_n)

مثال: مجموع n جمله ی اول يك دنباله ی عددی $s_n = \frac{n(n-5)}{12}$ است مطلوبست الف) جمله اول

ب) جمله دوم پ) قدرنسبت ت) جمله عمومی

$$\begin{cases} n = 1 \rightarrow s_1 = \frac{1}{3} \rightarrow s_1 = a_1 = \frac{1}{3} \\ n = 2 \rightarrow s_2 = \frac{13}{6} \rightarrow a_1 + a_2 = \frac{13}{6} \rightarrow a_2 = \frac{13}{6} - \frac{1}{3} = \frac{11}{6} \end{cases}$$

$$d = a_2 - a_1 = \frac{11}{6} - \frac{1}{3} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

$$a_n = a_1 + (n - 1)d = \frac{1}{3} + (n - 1)\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}n - \frac{7}{6}$$

نکته: در هر دنباله حسابی، S_n بر حسب n از درجه دوم می باشد و دو برابر ضریب n^2 قدر نسبت را

مشخص می کند.

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) = \frac{n}{2}(2a_1 + nd - d) = na_1 + \frac{d}{2}n^2 - \frac{nd}{2}$$

$$S_n \text{ روش دوم} = \frac{9n^2 - 5n}{12} = \frac{9}{12}n^2 - \frac{5}{12}n \rightarrow d = 2 \times \frac{9}{12} = \frac{3}{2}$$

مثال: در یک دنباله ی حسابی $S_n = \frac{3n^2}{2} + n$ می باشد جمله ی پنجاه و یکم این دنباله چیست؟

$$a_1 = S_1 = \frac{5}{2} \rightarrow a_{51} = \frac{5}{2} + (51-1)\left(\frac{3}{2}\right) = 152/5$$

$$d = 2 \times \frac{3}{2} = 3$$

رابطه ی بین S_n و a_n

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2 \rightarrow S_2 - S_1 = a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 \rightarrow S_3 - S_2 = a_3$$

$$S_{n-1} = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n \rightarrow \boxed{S_n - S_{n-1} = a_n}$$

در هر دنباله :

تست: در یک دنباله ی حسابی مجموع n جمله ی اول آن برابر $S_n = n(n+1)$ می باشد مجموع جملات ششم و

هفتم کدام است؟

۲۶ (۱) ۲۸ (۲) ۳۰ (۳) ۴۰ (۴)

$$S_1 = a_1 = 2 \text{ روش اول}$$

$$S_2 = a_1 + a_2 = 6 \rightarrow a_2 = 6 - 2 = 4 \rightarrow d = 4 - 2 = 2$$

$$a_5 = 2 + 5(2) = 12$$

$$2 + 6(2) = 14 \rightarrow a_5 + a_6 = 26$$

$$\text{دوم روش } a_5 = S_6 - S_5 = 42 - 30 = 12$$

$$a_6 = S_6 - S_5 = 56 - 42 = 14$$

تست: در تصاعد عددی $S_n = n(4n + 1)$ ، جمله ی n ام این دنباله کدام است؟

$$4n - 3 \quad (4) \quad 4n + 3 \quad (3) \quad 4n - 1 \quad (2) \quad 4n + 1 \quad (1)$$

$$S_1 = a_1 = 5$$

$$S_2 = a_1 + a_2 = 18 \rightarrow a_2 = 13 \rightarrow d = 8$$

$$a_n = a_1 + (n - 1)d = 5 + (n - 1)(8) = 8n - 3$$

$$\text{دوم روش } a_n = S_n - S_{n-1} = \dots$$

مجموع n جمله ی دوم (بعدی) دنباله

مثال: در دنباله ی حسابی مقابل مجموع ۵ جمله ی دوم را حساب کنید.

$$2, 5, 8, \dots$$

$$\boxed{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5}, \boxed{a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}}$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{S_1}$$

$$S_1 - S_5 = \text{مجموع پنج جمله ی دوم (بعدی)}$$

$$S_{2n} - S_n = \text{مجموع } n \text{ جمله ی دوم (بعدی)}$$

تست: در يك دنباله ی حسابی، مجموع ۵ جمله ی اول آن، $\frac{1}{3}$ مجموع پنج جمله ی بعدی است، جمله ی دوم چند

برابر جمله ی اول است؟ (سراسری تجربی ۹۱)

$$4 \quad (4) \quad 3 \quad (3) \quad \frac{5}{2} \quad (2) \quad \frac{2}{3} \quad (1)$$

$$S_5 = \frac{1}{3} \times (\text{بعدی}) \Rightarrow S_5 = \frac{1}{3}(S_{10} - S_5)$$

$$\xrightarrow{\times 3} 3S_5 = S_{10} - S_5 \rightarrow 4S_5 = S_{10}$$

$$\rightarrow 4 \left(\frac{5}{2} (2a_1 + 4d) \right) = \frac{10}{2} (2a_1 + 9d)$$

$$20(2a_1 + 4d) = 10(2a_1 + 9d)$$

$$4a_1 + 8d = 2a_1 + 9d \rightarrow d = 2a_1$$

$$\frac{a_2}{a_1} = ? \rightarrow \frac{a_1 + d}{a_1} = \frac{a_1 + 2a_1}{a_1} = \frac{3a_1}{a_1} = 3$$

مثال: در يك دنباله حسابی $S_n = 2n^2 - 3n$ می باشد حاصل $a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10}$ را بدست آورید؟

$$\underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5}_{S_5} + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} - \underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5}_{S_5} = S_{10} - S_5$$

$$= (2(10)^2 - 3(10)) - (2(5)^2 - 3(5)) = 135$$

تست: در يك دنباله ی حسابی نزولی، مجموع ۵ جمله ی دوم برابر مجموع ۴ جمله ی اول است این دنباله چند

جمله ی مثبت دارد؟

$$32 \quad (4) \quad 31 \quad (3) \quad 30 \quad (2) \quad 29 \quad (1)$$

مجموع چهار جمله اول = مجموع پنج جمله دوم

$$s_{10} - s_5 = s_7 \rightarrow \frac{10}{2}(2a_1 + 9d) - \frac{5}{2}(2a_1 + 4d) = \frac{7}{2}(2a_1 + 3d)$$

$$\Rightarrow a_1 + 29d = 0 \rightarrow a_{30} = 0 \rightarrow \underbrace{a_1, a_2, \dots, a_{29}}_{\text{مثبت}} \quad a_{30} = 0$$

تست: در یک دنباله ی عددی با جمله ی اول a اگر یک واحد به قدرنسبت جملات افزوده شود، آن گاه به

مجموع ۲۰ جمله ی اول آن چقدر اضافه خواهد شد؟

- ۱۹۰ (۴) ۱۸۰ (۳) ۱۷۰ (۲) ۱۶۰ (۱)

$$\begin{cases} s_{20} = \frac{20}{2}(2a_1 + 19d) \rightarrow s_{20} = 20a + 190d \\ d \rightarrow d + 1 \rightarrow s'_{20} = 20a + 190(d + 1) = 20a + 190d + 190 \end{cases}$$

$$\rightarrow s'_{20} - s_{20} = 190$$

تست: در یک دنباله ی حسابی اگر یک واحد از جمله ی اول کم کرده و دو واحد به قدرنسبت بیافزاییم به مجموع ۲۰ جمله ی اول

چند واحد اضافه می شود؟

- ۳۶۰ (۴) ۳۵۵ (۳) ۳۵۰ (۲) ۳۴۵ (۱)

$$\begin{cases} s_{20} = \frac{20}{2}(2a_1 + 19d) \rightarrow s_{20} = 20a_1 + 190d \\ a_1 \rightarrow a_1 - 1 \rightarrow s'_{20} = 20(a_1 - 1) + 190(d + 2) = 20a_1 - 20 + 190d + 380 \\ d \rightarrow d + 2 \end{cases}$$

$$s'_{20} - s_{20} = 360$$

یادآوری دنباله هندسی

مثال: دنباله مقابل را در نظر بگیرید

۲, ۴, ۸, ۱۶, ۳۲, ...

این دنباله یک دنباله ی حسابی نیست؛ چرا که تفاضل جملات متوالی آن ثابت نیست، بلکه نسبت تقسیم هر دو جمله ی متوالی آن برابر عددی ثابت است.

$$\dots = \frac{32}{16} = \frac{16}{8} = \frac{8}{4} = \frac{4}{2} = 2$$

اینگونه دنباله ها را دنباله های هندسی می نامیم.

تعریف دنباله هندسی: دنباله ای است که در آن هر جمله (به جز جمله ی اول) از ضرب جمله قبل از خودش

در عددی ثابت به دست می آید. به عبارت دیگر؛ نسبت تقسیم هر دو جمله ی متوالی آن برابر عددی ثابت است. این

عدد ثابت (غیر صفر) را قدر نسبت دنباله می نامیم و آن را با q نشان می دهیم.

نکته: قدر نسبت از فرمول زیر به دست می آید:

$$q = \frac{t_n}{t_{n-1}}$$

(نسبت دو جمله متوالی)

$$q = \frac{t_r}{t_1}$$

مثال: از بین موارد زیر، دنباله های هندسی را مشخص کنید و قدر نسبت آنها را بنویسید.

الف) $7, 28, 112, 448, \dots \rightarrow q = 4$

$$\frac{28}{7} = 4, \frac{112}{28} = 4, \frac{448}{112} = 4$$

ب) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \dots \rightarrow q = -\frac{1}{2}$

$$\frac{-\frac{1}{2}}{1} = \frac{\frac{1}{4}}{-\frac{1}{2}} = \frac{-\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}} = -\frac{1}{2}$$

دنباله هندسی نیست $2\sqrt{5}, 4\sqrt{5}, 6\sqrt{5}, 8\sqrt{5}, \dots$ پ)

دنباله ی ثابت $5, 5, 5, 5, \dots \rightarrow q = 1$ ت)

$$\frac{5}{5} = \frac{5}{5} = \frac{5}{5} = 1$$

تعریف: دنباله ای که افزایشی یا کاهشى باشد را یکنوا گوئیم و دنباله ای که نه افزایشی است و نه کاهشى را غیر

یکنوا گوئیم

نکته: اگر $q > 0$ باشد دنباله را یکنوا واگر $q < 0$ باشد دنباله را غیر یکنوا گوئیم.

مثال: در دنباله های هندسی زیر، قدر نسبت را مشخص کنید.

۱ مثال: $6, 18, 54, \dots$ $t_1 = 2, q = 3 \rightarrow q > 0$ (افزایشی - صعودی) (یکنوا)

۲ مثال: $3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \dots$ $t_1 = 3, q = \frac{1}{2} \rightarrow q < 0$ (کاهشى - نزولى) (یکنوا)

نه صعودی نه نزولی (غير يکنوا) $t_1 = 3, q = -2 \rightarrow q < 0$ مثال ۳: $3, -6, 12, -24, 48, \dots$

نه صعودی نه نزولی (غير يکنوا) $t_1 = -1, q = \frac{-1}{3} \rightarrow q < 0$ مثال ۴: $-1, +\frac{1}{3}, \frac{-1}{9}, \frac{1}{27}, \dots$

ساختار کلی جمله عمومی دنباله هندسی

در حالت در یک دنباله ی هندسی، اگر جمله ی اول t_1 و قدر نسبت q باشد، جملات آن به شکل زیر خواهند بود.

$$\begin{array}{ccccccc}
 \times q & & \times q & & \times q & & \\
 \rightarrow & & \rightarrow & & \rightarrow & & \\
 t_1 & , & \underbrace{t_1 q}_{t_2} & , & \underbrace{t_1 q^2}_{t_3} & , & \underbrace{t_1 q^{n-1}}_{t_n}
 \end{array}$$

با دقت در الگوی به کار رفته در جملات بالا دیده می شود که:

نکته: جمله n ام یا جمله عمومی دنباله ی هندسی که در آن t_1 جمله اول و q قدر نسبت باشد به صورت زیر است.

$$t_n = t_1 q^{n-1}$$

دقت کنیم به جای حرف t از حروف دیگر نیز می توان استفاده کرد.

$$b_n = b_1 q^{n-1} \quad \text{یا} \quad a_n = a_1 q^{n-1}$$

مثال: در دنباله های هندسی زیر، قدر نسبت را مشخص کنید و دو جمله ی بعدی را بنویسید. سپس جمله ی

عمومی هر دنباله را به دست آورید.

الف) $2, 6, 18, 54, 162, 486, \dots$ $a_1 = 2, \quad q = 3, \quad a_n = 2 \times 3^{n-1}$

ب) $4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$ $e_1 = 4, \quad q = \frac{1}{2}, \quad e_n = 4 \times (\frac{1}{2})^{n-1}$

مثال: چندمین جمله ی یک دنباله ی هندسی با جمله اول ۱ و قدر نسبت $\frac{1}{2}$ برابر $\frac{1}{256}$ می باشد؟

$$\begin{aligned} t_1 &= 1 & t_n &= t_1 q^{n-1} \\ q &= \frac{1}{2} & \frac{1}{256} &= 1 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^8} \Rightarrow n-1 = 8 \Rightarrow n = 9 \\ t_n &= \frac{1}{256} \end{aligned}$$

به دست آوردن خواسته سوال با داشتن جمله عمومی (t_n)

مثال: در دنباله های زیر جمله ی اول و قدرنسبت را مشخص کنید.

$$۱: t_n = 5 \times 2^n \rightarrow \begin{cases} t_1 = 10 \\ t_2 = 20 \end{cases} \rightarrow q = \frac{20}{10} = 2$$

روش کنکوری: ضرب $q = (\text{پایه})^n$

$$۲: t_n = 7 \times 3^{2n} \quad q = (3)^2 = 9$$

$$۳: t_n = 2 \times 3^{3n+1} \quad q = (3)^3 = 27$$

$$۴: t_n = 5 \times 2^{-3n+1} \quad q = (2)^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

$$۵: t_n = 3(-2)^{n+1} \quad q = (-2)^1 = -2$$

$$۶: t_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \quad q = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

تمرین: جمله عمومی یک دنباله هندسی $a_n = 6 \times 2^{3n-1}$ است، قدر نسبت آن کدام است؟

جزوه کنکوری تمام مباحث رياضيات تاليف حبيب هاشمی در کانال تلگرامی @eshgheriazikonkour

نکته: اگر t_n, t_m دو جمله دلخواه از یک دنباله هندسی باشند داریم:

$$\Rightarrow t_m = t_n q^{(m-n)}$$

حالت خاص $t_n = t_1 q^{n-1}$

به دست آوردن خواسته سوال با داشتن دو جمله دلخواه از دنباله

$$\left\{ \begin{array}{l} t_v = 64 \\ t_r = 4 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} t_v = t_r q^{v-r} \rightarrow 64 = 4q^f \rightarrow q^f = 16 \rightarrow \begin{array}{l} q = 2 \\ q = -2 \end{array} \\ t_f = t_r q^{f-r} = 4(\pm 2)^1 = \pm 8 \\ t_1 = t_r q^{1-r} = 4(\pm 2)^{-2} = 4 \times \frac{1}{(\pm 2)^2} = 4 \times \frac{1}{4} = 1 \\ t_{11} = t_v q^r = 64(\pm 2)^2 = \pm 64 \times 4 = \pm 256 \end{array} \right.$$

مثال: اگر جملات پنجم و هفتم یک دنباله ی هندسی به ترتیب ۸ و ۱۶ باشد، جمله ی یازدهم این دنباله کدام

است؟

۳۲ (۱) ۱۲۸ (۲) ۶۴ (۳) ۲۰۶ (۴)

$$t_v = t_8 q^r \rightarrow 16 = 8q^r \rightarrow q = \pm\sqrt{2}$$

$$t_{11} = t_v q^f = 16 \times (\pm\sqrt{2})^4 = 16(4) = 64$$

درج واسطه m هندسی

نکته: برای درج m واسطه هندسی بین دو عدد a و b ابتدا با فرمول جمله عمومی قدرنسبت را پیدا کرده، سپس واسطه‌ها را بین دو عدد می‌نویسیم.

تست: بین $\frac{1}{3}$ و ۲۷ سه واسطه هندسی درج کرده ایم. مجموع این سه جمله کدام است؟

- ۱۰ (۱) -۷ (۲) -۸ (۳) ۱۲ (۴)

$$\begin{array}{ccc} \frac{1}{3}, -, -, -, 27 & & t_n = t_1 q^{n-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ t_1 & & t_5 \end{array} \quad 27 = \frac{1}{3} q^{5-1} \rightarrow 81 = q^4 \rightarrow q = \pm 3$$

$$q = +3 \rightarrow \frac{1}{3}, \underline{1, 3, 9}, 27 \rightarrow 1 + 3 + 9 = 13$$

$$q = -3 \rightarrow \frac{1}{3}, -1, 3, -9, 27 \rightarrow -1 + 3 - 9 = -7$$

تست: بین دو عدد ۱۵ و ۴۰۵ چند واسطه هندسی با قدرنسبت ۳ می‌توان درج کرد؟

- ۲ (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴)

$$\begin{array}{ccc} 15, \dots, \dots, \dots, 405 & & \\ \downarrow & & \downarrow \\ t_1 & & t_n \end{array}$$

$$\frac{t_n = t_1 q^{n-1}}{\rightarrow 405 = 15(3)^{n-1} \rightarrow 27 = (3)^{n-1} \rightarrow 3^3 = 3^{n-1}}$$

$\rightarrow n - 1 = 3 \rightarrow n = 4 \rightarrow$ تعداد کل جملات

تعداد واسطه ها $n - 2 = 4 - 2 = 2$

رابطه ی بین سه جمله متوالی در دنباله هندسی

نکته: هرگاه a, b, c سه جمله ی متوالی از یک دنباله ی هندسی باشند داریم.

$$a, b, c \xrightarrow{a \times c = b^2} b = \pm \sqrt{a \times c}$$

↓
 a, c واسطه هندسی بین

$3, 6, 12, 24, 48, \dots$

$3 \times 12 = 6^2 \quad 6 \times 24 = 12^2$

مثال: اگر سه عدد $2^a, 4\sqrt{2}, 2^b$ تشکیل دنباله هندسی دهند، واسطه حسابی بین دو عدد a, b را بدست آورید.

$$(4\sqrt{2}) = 2^a \times 2^b$$

$$16 \times 2 = 2^{a+b} \rightarrow 2^4 \times 2 = 2^{a+b} \rightarrow 2^5 = 2^{a+b} \rightarrow a + b = 5$$

$$2x = a + b \rightarrow x = \frac{a + b}{2} = \frac{5}{2}, \quad a, x, b \text{ واسطه حسابی بین}$$

تست: در دنباله ی هندسی و افزایشی ... $a, 9, b, 4$ قدرنسبت کدام است؟

$$-\frac{3}{4}(4) \quad -6(3) \quad +\frac{3}{2}(2) \quad +6(1)$$

$$a^2 = 4 \times 9 \rightarrow a^2 = 36 \rightarrow \begin{cases} a = 6 \\ a = -6 \end{cases}$$

$$a = 6 \rightarrow 4, 6, 9, \dots \text{ افزایشی} \rightarrow q = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$a = -6 \rightarrow 4, -6, 9, \dots \text{ غیر یکنوا} \rightarrow q = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$$

تست: در دنباله ی هندسی $4, n, n-1, \frac{m+1}{4}$ حاصل $m + 2n$ کدام است.

- ۳(۱)
- ۲(۲)
- ۱(۳)
- ۵(۴)

$$4, n, n-1 \Rightarrow 4 \times (n-1) = n^2 \rightarrow 4n - 4 = n^2 \rightarrow n^2 - 4n + 4 = 0 \rightarrow n = 2$$

$$4, \boxed{2, 1, \frac{m+1}{4}} \rightarrow 2 \times \left(\frac{m+1}{4}\right) = 1^2 \Rightarrow \frac{m+1}{2} = 1 \rightarrow m = 1$$

نکته: سه جمله متوالی یک دنباله هندسی را بهتر است به صورت زیر نشان دهیم

$$\frac{a}{q}, a, aq$$

تست: در یک تصاعد هندسی مجموع سه جمله متوالی ۱۹ و حاصلضرب آنها ۲۱۶ است تفاضل کوچکترین و

بزرگترین این سه عدد کدام است؟ (سراسری تجربی ۹۰)

- ۴(۱)
- ۵(۲)
- ۶(۳)
- ۷(۴)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{a}{q} + a + aq = 19 \xrightarrow{a=6} \frac{6}{q} + 6 + 6q = 19 \xrightarrow{\times q} 6 + 6q + 6q^2 = 19q \\ \frac{a}{q} \cdot a \cdot aq = 216 \rightarrow a^3 = 216 \rightarrow a = 6 \end{array} \right. \begin{cases} 6q^2 - 13q + 6 = 0 \\ (6q - 4)(6q - 9) = 0 \\ q = \frac{2}{3} \quad q = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$q = \frac{2}{3} \rightarrow \frac{6}{3}, 6, 6 \times \frac{2}{3} \rightarrow 9, 6, 4 \rightarrow 9 - 4 = 5$$

$$q = \frac{3}{4} \rightarrow \frac{6}{4}, 6, 6 \times \frac{3}{4} \rightarrow 4, 6, 9 \rightarrow 9 - 4 = 5$$

حاصلضرب n جمله ی اول دنباله ی هندسی

نکته: حاصلضرب n جمله ی اول دنباله ی هندسی از فرمول زیر بدست می آید.

$$(t_1 t_n)^{\frac{n}{2}}$$

۲, ۴, ۸, ۱۶, ...

مثال: حاصل ضرب بیست جمله اول دنباله ی هندسی مقابل را محاسبه کنید.

حل (روش اول

$$\begin{matrix} 2^1 & 2^2 & 2^3 \\ 2 & 4 & 8, \dots \end{matrix}$$

$$(t_1 t_n)^{\frac{n}{2}} = (2 \times 2^{20})^{\frac{20}{2}} = (2^{21})^{\frac{20}{2}} = (2^{21})^{10} = 2^{210}$$

روش دوم)

$$2^1 \times 2^2 \times 2^3 \times \dots \times 2^{20} = 2^{1+2+3+\dots+20} = 2^{210}$$

$$1 + 2 + 3 \dots + n = \frac{(n)(n+1)}{2} \rightarrow 1 + 2 + 3 \dots + 20 = \frac{(20)(20+1)}{2} = 210$$

مجموع n جمله ی اول دنباله ی هندسی

فعالیت: دنباله هندسی زیر را در نظر بگیرید، ($q \neq 1$)

$$a, aq, aq^2, \dots, aq^{n-1}$$

فرض می کنیم مجموع n جمله اولیه دنباله هندسی S_n باشد :

$$S_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-2} + aq^{n-1}$$

طرفین رابطه را در q ضرب می کنیم:

$$S_n q = aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + aq^n$$

$S_n - S_n q$ را تشکیل و آن را ساده کنید:

$$\begin{aligned} S_n - S_n q &= (a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-2} + aq^{n-1}) - (aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + aq^n) \\ &= a - aq^n \end{aligned}$$

با فاکتورگیری داریم :

$$S_n(1 - q) = a(1 - q^n)$$

پس نتیجه می گیریم:

مجموع n جمله ی اول دنباله ی هندسی برابر است با:

$$S_n = a \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

حالت خاص: در صورتی که قدرنسبت دنباله هندسی یک باشد مجموع n جمله اول دنباله هندسی را به دست

آورید. ($a \neq 0$)

$$a, a, a, \dots, a \quad q = 1 \quad S_n = na$$

مثال: مجموع ۱۰ جمله اول دنباله هندسی زیر را به دست آورید.

$$\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \dots \quad S_{10} = \frac{1}{8} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{1 - \frac{1}{2}} \cong 0. / 249755$$

مثال: برای محافظت از تابش خطرناک مواد رادیواکتیویته لایه های محافظتی وجود دارد که شدت تابش پرتوها

پس از عبور از هر یک از آنها نصف می شود. حداقل چند لایه باید استفاده کنیم تا شدت تابش مواد خطرناک

دست کم تا ۹۷ درصد کاهش یابد؟

حل: اولین لایه: شدت تابش را نصف می کند. دومین لایه باز این تابش را نصف می کند $\left(\frac{1}{2}\right)$ و... بدین ترتیب دنباله

ای از اعداد به دست می آید:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$$

این یک دنباله هندسی با قدرنسبت $\frac{1}{2}$ است. حال می خواهیم بدانیم چند جمله از این دنباله باید جمع شود تا حاصل

حداقل ۹۷ درصد شود.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} \geq \frac{97}{100}$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \geq \frac{97}{100} \Rightarrow 1 - \frac{1}{2^n} \geq \frac{97}{100}$$

$$\frac{1}{2^n} \leq \frac{3}{100} \Rightarrow 2^n \geq \frac{100}{3} \cong 33 / 3$$

با آزمایش اعداد طبیعی در نامعادله اخیر، و اینکه $2^6 = 64$ در می یابیم که حداقل مقدار n برابر برقراری نامساوی فوق برابر با ۶ خواهد بود. پس تعداد لایه ها باید حداقل شش تا باشد.

روش دوم $\frac{100}{100}$ شدت تابش

درصد کاهش داشته $\frac{1}{625} \rightarrow \frac{3}{25} \xrightarrow{\text{لایه ۶}} \frac{6}{5} \xrightarrow{\text{لایه ۵}} \frac{12}{5} \xrightarrow{\text{لایه ۴}} \frac{24}{5} \xrightarrow{\text{لایه ۳}} \frac{48}{5} \xrightarrow{\text{لایه ۲}} \frac{96}{5} \xrightarrow{\text{لایه ۱}} \frac{192}{5} \rightarrow 98/375$

مثال: در داستان مخترع شطرنج (صفحه ۵ کتاب) اگر در خانه اول یک دانه گندم و در خانه دوم دو دانه گندم و به

همین صورت در هر خانه دو برابر خانه قبلی گندم قرار دهیم و اگر هر دانه گندم را یک گرم در نظر بگیریم:

الف) این جایزه چند گرم می شود؟

گرم $(1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{63})$

$$\frac{1(1 - 2^{64})}{1 - 2} = 2^{64} - 1 = 18446744073709551615$$

ب) نشان دهید جایزه او بیش از ۱۰۰۰ میلیارد تن خواهد شد. چون ۱۰۰۰ میلیارد تن برابر است با 10^{18} گرم

$$a = 1 \quad q = 2 \quad n = 64 \quad S_n = a \left(\frac{1 - q^n}{1 - q} \right) \rightarrow 1 \left(\frac{1 - 2^{64}}{1 - 2} \right) = S_{64}$$

$$S_{64} = 2^{64} - 1 > 2^{63} = (2^7)^9 > 100^9 = 10^{18}$$

۶ طول ضلع مربعی یک متر است. ابتدا نیمی از مساحت مربع را رنگ می کنیم. سپس نیمی از مساحت باقی مانده را و به همین ترتیب در هر مرحله نیمی از مساحت باقی مانده از قبل را رنگ می کنیم. پس از دست کم چند مرحله حداقل ۹۹ درصد سطح مربع رنگ شده است؟

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots \quad S_n = a \left[\frac{1 - q^n}{1 - q} \right]$$

$$S_n > \frac{99}{100} \quad \frac{1}{2} \left[\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} \right] > \frac{99}{100} \quad 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n > 99/100$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n < \frac{1}{100} \rightarrow 2^n > 100 \quad n \text{ حداقل} = 7$$

تمرین: در یک دنباله ی هندسی جمله ی اول برابر ۳ و قدرنسبت برابر ۲- است مجموع هفت جمله ی اول این

دنباله چیست؟ جواب ۱۲۹

مثال: در دنباله ی هندسی با شرایط $a_1 = 3$ و $a_5 = 24$ مجموع ۵ جمله ی اول برابر چیست؟

$$a_5 = a_1 q^4 \rightarrow 24 = 3q^4 \rightarrow q = 2$$

$$S_5 = \frac{a_1(1 - q^5)}{1 - q} = \frac{3(1 - 2^5)}{1 - 2}$$

جهت تهیه جزوه کل کتاب به سایت ریاضی کده سر بزنید

www.riazikade.com

یا به شماره زیر پیام دهید

۰۹۱۲۰۹۱۸۷۰۱

حبيب هاشمی