
بسم الله الرحمن الرحیم

فصل اول هندسه۲

پایه یازدهم

رشته ریاضی و فیزیک

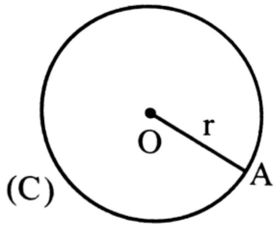
- طبقه بندی سوالات به صورت موضوعی
- پاسخ کاملا تشریحی
- حل تمامی تمرینات ٬ فعالیت ها و کاردر کلاس ها

مؤلف:

حبیب هاشمی

درس اول : مفاهیم اولیه و زاویه ها در دایره

تعریف دایــره : فرض کنیم O نقطه ثابت و r عدد حقیقی مثبت باشد. دایره به مرکز O و شعاع r مجموعه نقطه‌هایی از صفحه است که فاصله ی آن ها از نقطه Oبرابر r باشد.



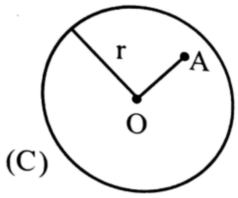
$OA = r$

☆ **توجه ۱ :** دایره C به مرکز O و شعاع rرا به صورت $C(O,r)$ نمایش می دهیم.

نکته ۱ : دو دایره با شعاع های مساوی با هم برابرند.

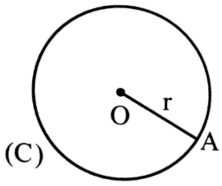
اوضاع نسبی نقطه و دایره :

الف) اگر نقطه A درون دایره $C(o,r)$ باشد، فاصلهٔ آن تا مرکز دایره، کم تر از شعاع دایره است.



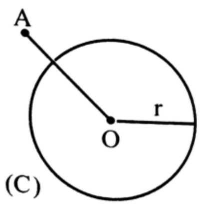
$OA < r$

ب) اگر نقطه A روی دایرهٔ $C(O,r)$ باشد، فاصله آن تا مرکز دایره برابر شعاع دایره است.



$OA = r$

پ) اگر نقطه A بیرون دایره $C(O,r)$ باشد. فاصله آن تا مرکز دایره بیش‌تر از شعاع دایره است

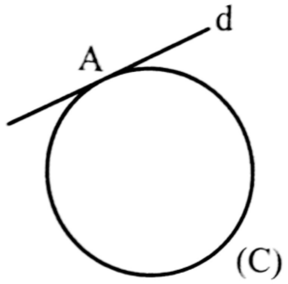


$OA > r$

خط مماس بر دایره و خط متقاطع با دایره :

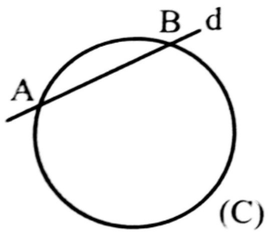
➢ **خط مماس بر دایره:** اگر خط و دایره فقط در یک نقطه مشترک باشند، می گوییم خط بر دایره مماس است.

در شکل مقابل خط d در نقطه A بر دایره (C) مماس است.



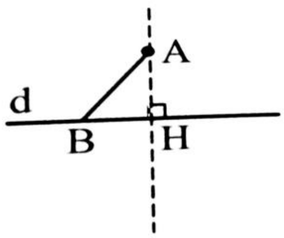
➢ **خط متقاطع با دایره:** اگر خط و دایره در دو نقطه مشترک باشند، می‌گوییم خط و دایره متقاطع‌اند .

در شکل زیر، خط d دایره (C) را در دو نقطه A و B قطع کرده است. در این حالت خط را نسبت به دایره قاطع می‌نامیم.



➢ **فاصله یک نقطه از یک خط :** اگر از یک نقطه خارج یک خط، عمودی بر آن رسم کنیم، فاصله آن نقطه تا پای عمود، کوتاه‌ترین فاصله بین نقطه A و نقاط خط می باشد.

در شکل مقابل، AH کوتاه‌ترین فاصه نقطه A تا نقاط خط d است (AB>AH) و به آن فاصله نقطه A تا خط d گفته می‌شود. اگر A روی خط d باشد، فاصله A تا خط d صفر است.

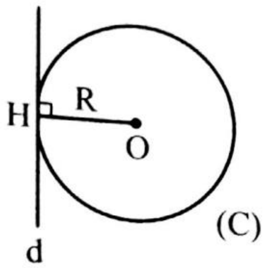


اوضاع نسبی یک خط و یک دایره :

یک خط و یک دایره در صفحه دارای **سه وضعیت** زیر هستند:

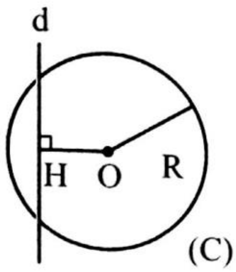
الف) خط بر دایره مماس است، اگر و تنها اگر فاصله مرکز دایره تا خط برابر شعاع دایره باشد.

$OH = R \Leftrightarrow$ خط d و دایره (C) مماس است



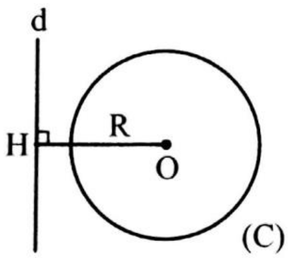
ب) خط با دایره متقاطع است اگر و تنها گر فاصله مرکز دایره تا خط کم تر از شعاع دایره باشد.

$OH < R \Leftrightarrow$ خط d و دایره (C) متقاطع اند



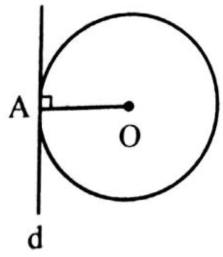
پ) خط و دایره نقطه اشتراکی ندارند . اگر و تنها اگر فاصله مرکز دایره تا خط ، بزرگتر از شعاع دایره باشد.

$OH > R \Leftrightarrow$ خط d و دایره (C) نقطه اشتراکی ندارند



➢ خاصیت مهم خط مماس :

خاصیت ❶ : اگر A نقطه ای روی دایره باشد شعاع OA و خط مماس بر دایره در نقطه ی A بر هم عمودند



$(d \perp OA)$

اثبات: فرض کنیم خط d در نقطه A بر دایره C(O,R) مماس باشد. از نقطه O عمود OH را بر خط d رسم می کنیم.

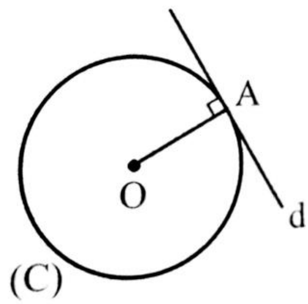
الف) اگر OH>R باشد، خط d و دایره (C) متقاطع نیستند که با فرض مماس بودن خط d و دایره (C) تناقض دارد.

ب) اگر OH<R باشد، خط d و دایره (C) در دو نقطه متقاطع می شوند که با فرض مماس بودن آن ها تناقض دارد.

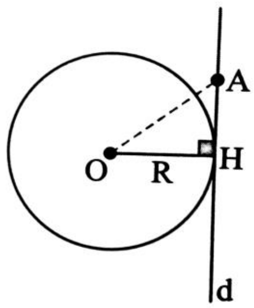
پ) اگر OH = R باشد در این صورت H روی دایره (C) قرار دارد و چون H روی خط d نیز هست پس به جهت مماس بودن خط و دایره نتیجه می شود: H همان A است. بنابراین OA بر خط d عمود است. ■

➢ چگونگی رسم خط مماس بر دایره در نقطه ی A بر دایره (به کمک خاصیت۱) :

مرکز دایره را به نقطه A وصل می‌کنیم . سپس در نقطه A خط d را عمود بر OA رسم می‌کنیم خط d در نقطه A بر دایره (C) مماس است.



خاصیت ❷ : اگر خطی در انتهای شعاعی از دایره بر آن شعاع عمود باشد، آن گاه این خط بر دایره مماس است.



راه حل: در شکل روبه رو خط d در نقطه ی H بر شعاع OH عمود است باید ثابت کنیم خط d بر دایره مماس است.

برای این کار کافی است ثابت کنیم خط d و دایره ی C (O,R) فقط در نقطه ی H مشترک اند.

فرض کنید نقطه یa نقطه ای غیر از H و روی خط d باشد. چون مثلث OAH قائم الزاویه است و OA وتر آن است.

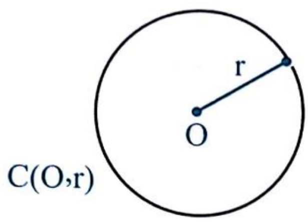
پس OA >OH یعنی R<O . بنابراین A خارج دایره است. در نتیجه خط d و دایره فقط در یک نقطه‌ی H مشترک هستند و این نتیجه می دهد که خط d بر دایره مماس است.

✪ نتیجه خاصیت ۱ و ۲ :

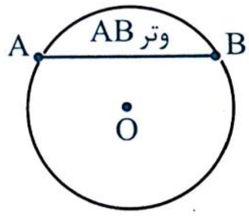
در صفحه یک خط و دایره بر هم مماس اند اگر و تنها اگر این خط بر شعاع نقطه تماس عمود باشد.

➢ تعاریف و مفاهیم اولیه :

الف) شعاع دایره: پاره خطی که یک سر آن مرکز دایره و سر دیگر آن نقطه ای روی دایره است.

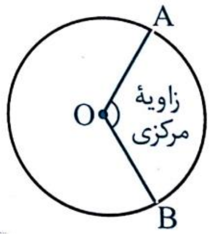


ب) وتر دایره: پاره‌خطی که دو نقطهٔ متمایز از دایره را به هم وصل می کند. به عبارت دیگر پاره خطی که دو سـر آن روی دایره باشد.

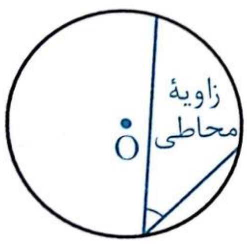


پ) قطر دایره: وتری از دایره که از مرکز دایره می‌گذارد.

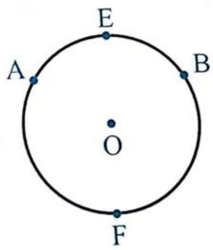
ت) زاویه مرکزی: زاویه‌ای که رأس آن بر مرکز دایره واقع است.



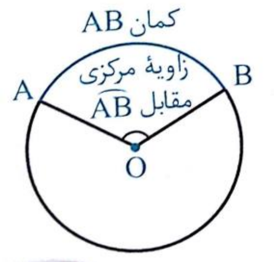
ث) زاویه محاطی: زاویه‌ای است که راس آن روی دایره و اضلاع آن دو وتر از دایره باشند.



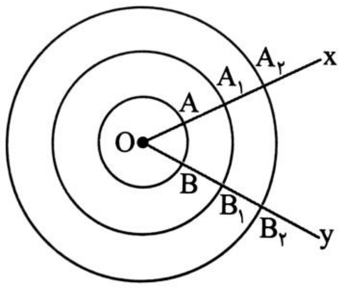
ج) کمان: دو نقطه A و B واقع بر یک دایره دو کمان $\overset{\frown}{AB}$ را روی آن دایره مشخص می کند. در این حالت برای مشخص کردن هر یک از آنها از نقطه ای اختیاری واقع بر هر یک از دو کمان استفاده می شود. مانند کمان های $\overset{\frown}{AEB}$ و $\overset{\frown}{AFB}$ در شکل مقابل. معمولا منظور از $\overset{\frown}{AB}$ کمان کوچکتر است.



چ) اندازه کمان : هر یک از زاویه های مرکزی یک کمان از دایره جدا می‌شود به آن کمان، کمان نظیر آن زاویه مرکزی گفته می‌شود. اندازه کمان نظیر هر زاویه مرکزی، همان اندازه زاوایه مقابل به آن کمان تعریف می‌شود که واحد آن درجه است.



❖ **تذکــر:** دقت کنید که نباید اندازه‌ی یک کمان را با طول آن اشتباه گرفت. برای درک این مطلب به شکل روبه‌رو نگاه کنید.



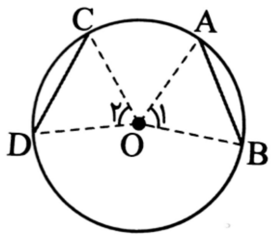
در این شکل سه دایره ی هم مرکز رسم کرده ایم. با توجه به مطلب بالا، اندازه ی کمان ها AB، A_1B_1 و A_2B_2 برابرند.

یعنی $x\hat{O}y = \widehat{AB} = \widehat{A_1B_1} = \widehat{A_2B_2}$ اما طول این کمان ها با هم برابر نیستند.

طول کمان A_2B_2 < طول کمان A_1B_1 < طول کمان AB

خواص وترهای مساوی در دایره :

۱ در یک دایره (یا دو دایره به شعاع های مساوی) دو وتر برابرند اگر و تنها اگر کمان‌های نظیر آن‌ها برابر باشند.



$$AB = CD \Leftrightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$$

راه حل اثبات دو بخش دارد.

بخش اول: فرض می‌کنیم AB=CD و ثابت می‌کنیم $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$ (شکل را ببینید) از مرکز دایره به دو سر وترهای AB و CD وصل می‌کنیم.

دو مثلث OAB و OCD به حالت تساوی سه ضلع هم نهشت‌اند:

$$\begin{cases} OA = OC = R \\ OB = OD = R \\ AB = CD \end{cases}$$

بنابراین $\hat{O}_۱ = \hat{O}_۲$ در نتیجه $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$

بخش دوم : فرض می‌کنیم $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$ و ثابت می‌کنیم $AB = CD$

چون دو کمان AB و CD با هم برابرند ،پس زاویه های مرکزی رو به رو با آن ها با هم برابرند، یعنی $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$

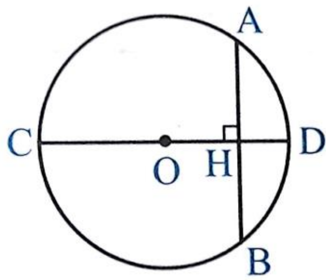
اکنون دو مثلث OAB و OCD به حالت تساوی دو ضلع و زاویه بین آن ها با هم همنشت اند:

$$\begin{cases} \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ OA = OC = R \\ OB = OD = R \end{cases}$$

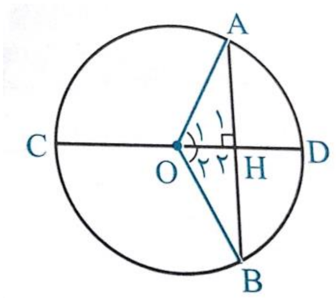
و در نتیجه $AB = CD$

➤ چگونه نصف شدن وتر به وسیله قطر دایره :

❶ در هر دایره قطر عمود بر هر وتر آن وتر و کمان‌های نظیر آن وتر را نصف می‌کند.



قطر CD عمود بر وتر AB $\Rightarrow AH = BH, \begin{cases} \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BD} \\ \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BC} \end{cases}$

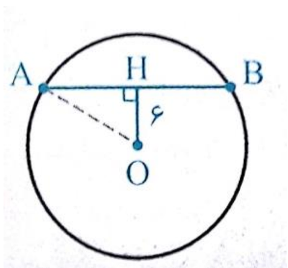


فرض : $CD \perp AB$

حکم : $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BD}$ ، AH=BH

$$\begin{cases} OA = OB = R \\ OH = OH \end{cases} \xRightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} \overset{\triangle}{OAH} \cong \overset{\triangle}{OBH} \xRightarrow{\text{اجزای نظیر}} \begin{cases} AH = BH \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \end{cases} \xRightarrow{\text{زاویه مرکزی}} \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BD}$$

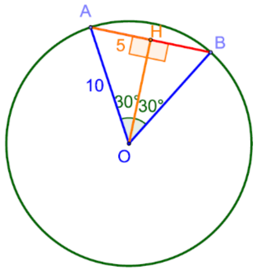
مثـال ۱ : دایره $C(O,۱۰)$ داده شده است اگـر فاصله مرکز دایره از وتـر AB برابر ۶ باشد طول وتر AB را بدست آورید.



پاسخ: در مثلث AHB از رابطه فیثاغورس استفاده می‌کنیم.

$$OA^۲ = OH^۲ + AH^۲ \Rightarrow ۱۰^۲ = ٦^۲ + AH^۲ \Rightarrow AH^۲ = ٦٤ \Rightarrow AH = ۸ \Rightarrow AB = ۲AH = ١٦$$

مثـال ۲: در دایره $C(O,R)$ و $\overset{\frown}{AB}=60^\circ$ و $AB=10$ فاصله O از وتر AB را به دست آورید. (تمرین ۷ ص ۱۷)



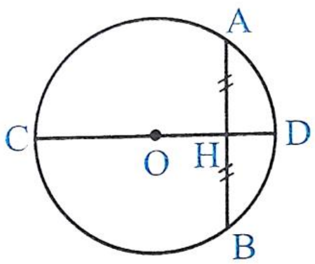
پاسخ : می‌دانیم که مثلث OAB متساوی الاضلاع است چون ۳ زاویه ۶۰ درجه دارد. و برای پیدا کردن فاصله‌ی وتر از مرکز باید نقطه‌ی O بر وتر عمود کنیم سپس طول پاره خط OH را به دست آوریم ، قطر عمود بر وتر و وتر را نصف می‌کند بنابراین $AH=5$ پس در مثلث قائم الزاویه OAH داریم:

$$OA^2=OH^2+AH^2\rightarrow 10^2=OH^2+5^2\rightarrow OH^2=75\rightarrow OH=\sqrt{75}\Rightarrow OH=5\sqrt{3}$$

❷ در هر دایره اگر قطری از آن یک وتر را نصف کند. آن‌گاه بر آن وتر عمود است و کمان‌های نظیر وتر را نصف می‌کند.

فرض: $AH=BH$

حکم: $AD=BD$, $CD\perp AB$



فرض: $AH=BH$ حکم: $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}$ و $CD\perp AB$

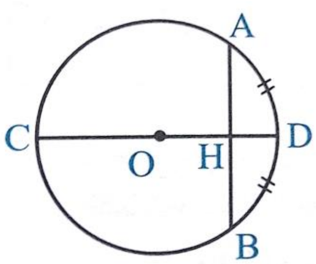
$$\left.\begin{matrix}OA=OB=R\\AH=BH\\OH=OH\end{matrix}\right\}\xrightarrow{\text{ض ض ض}}\overset{\Delta}{OAH}\cong\overset{\Delta}{OBH}\xrightarrow{\text{اجزای نظیر}}\begin{cases}H_1=H_2=90^\circ\\ O_1=O_2\xrightarrow{\text{زاویه مرکزی}}\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}\end{cases}$$

❸ در هر دایره قطری از دایره که یک سر آن وسط کمان نظیر یک وتر باشد بر آن وتر عمود است و آن را نصف می کند.

$AD=BD$ یا $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}\Rightarrow CD\perp AB$, $AH=BH$

فرض: $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}$

حکم : $AH=BH$ و $CD\perp AB$

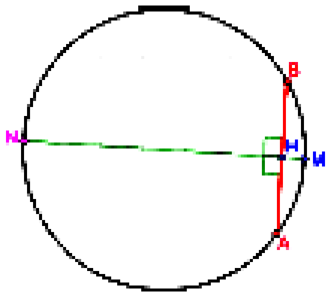


$$AD = BD \xrightarrow{\text{زاویه مرکزی}} \left.\begin{array}{c} OA = OB = R \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \\ OH = OH \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{ض ز ض}} O\overset{\Delta}{A}H \cong O\overset{\Delta}{B}H$$

$$\xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} \begin{cases} H_1 = H_2 = 90^\circ \\ AH = BH \end{cases}$$

✪ **نتیجه :** عمود منصف وتر دایره از مرکز دایره می‌گذرد.

مثــال ۳ : اگـر نقاط وسط وتر AB و کمان AB را داشته باشیم، چگونه می توانیم قطـر عمود بر وتر AB را رسم کنیم؟



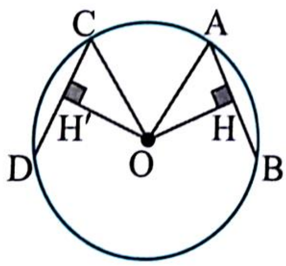
اگر وسط کمان را M و وسط وتر را H بنامیم کافی است این دو نقطه را به هم وصل کنیم و از سمت H امتداد دهیم تا دایره را در نقطه N قطع کند با MN قطر عمود بر این وتر است.

➢ فاصله‌ی دو وتر مساوی از مرکز دایره :

در یک دایره (یا دو دایره با شعاع‌های مساوی) دو وتر برابرند، اگر و تنها اگر فاصله مرکز دایره از آن‌ها برابر باشد.

$$AB = CD \Leftrightarrow OH = OH'$$

راه حل: فرض می کنیم $AB = CD$ می خواهیم ثابت کنیم $OH = OH'$ و بر عکس (شکل را ببینید)



از نقطه‌ی O مرکز دایره، عمودهای OH و OH' را به ترتیب بر وترهای AB و CD رسم می‌کنیم.

در دو مثلث قائم الزاویه‌ی OAH و OCH' بنابر قضیه‌ی فیثاغورس.

$$OA^۲ = OH^۲ + AH^۲ \ , \ \ OC^۲ = OH'^۲ + CH'^۲$$

یعنی

$$AH = \frac{AB}{۲} \Rightarrow R^۲ = OH^۲ + \frac{AB^۲}{۴}, \ CH' = \frac{CD}{۲} \ , \ \ R^۲ = OH'^۲ + \frac{CD^۲}{۴}$$

چون $AB = CD$ پس :

$$OH^۲ = R^۲ - \frac{AB^۲}{۴} = R^۲ - \frac{CD^۲}{۴} = OH'^۲$$

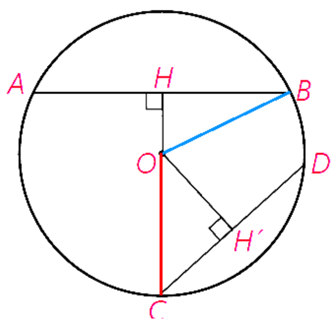
در نتیجه $OH = OH'$

با عمل بازگشتی می توان عکس این مطلب را ثابت کرد.

خواص وترهای نامساوی در دایره:

در یک دایره اگر دو وتر نامساوی باشند آن‌گاه وتری که بزرگ‌تر است به مرکز دایره نزدیک‌تر است و بالعکس.

به عبارت دیگر در دایره $(AB > CD, C(O,R)$ اگروتنها اگر $OH < OH'$ (OH و OH' فاصله O از دو وتر AB و CD هستند) (تمرین ۸ صفحه ۱۸)



حل) از O به B و C وصل می‌کنیم

می‌دانیم اگر از مرکز دایره عمودی بر وتر رسم کنیم آن وتر را نصف می کند.

فرض : $AB > CD$ و حکم: $OH < OH'$

$$OB = OC = R \quad , BH = \frac{AB}{۲}, \ CH' = \frac{CD}{۲} \qquad (۱)$$

$\overset{\Delta}{OBH}: H = ۹۰° \Rightarrow BH^۲ = R^۲ - OH^۲$

$\overset{\Delta}{OCH'}: H' = ۹۰° \Rightarrow CH'^۲ = R^۲ - OH'^۲$

$AB > CD \Rightarrow \frac{AB}{۲} > \frac{CD}{۲} \xrightarrow{(۱)} BH > CH' \Rightarrow BH^۲ > CH'^۲$

$\Rightarrow R^۲ - OH^۲ > R^۲ - OH'^۲ \Rightarrow -OH^۲ > -OH'^۲ \xrightarrow{\times(۱)} OH^۲ < OH'^۲ \xrightarrow[OH'>۰]{OH>۰} OH < OH'$

فرض : $OH < OH'$ و حکم : $AB > CD$

$OB = OC = R \qquad ۲BH = AB \qquad ,۲CH = CD$

$\overset{\Delta}{OBH} \Rightarrow OH^۲ = R^۲ - BH^۲$

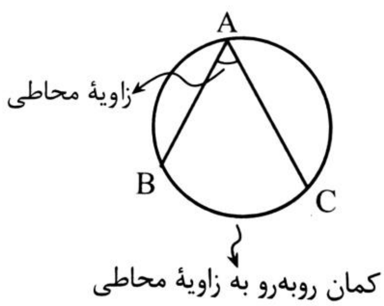
$\overset{\Delta}{OCH'}: H' = ۹۰° \Rightarrow OH'^۲ < R^۲ - CH'^۲$

$OH < OH' \Rightarrow R^۲ - BH^۲ < R^۲ - CH'^۲$

$\Rightarrow -BH^۲ < -CH'^۲ \xrightarrow{\times(-۱)} BH^۲ > CH'^۲ \xrightarrow[CH'>۰]{BH>۰} BH > CH' \xrightarrow{(۱)} AB > CD$

زاویه محاطی و اندازه آن :

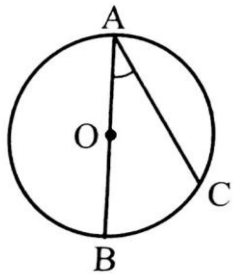
زاویه محاطی: زاویه ای است که رأس آن روی دایره و اضلاع آن شامل دو وتر از دایره باشند. شکل زیر زاویه محاطی BAC را نشان می‌دهد.



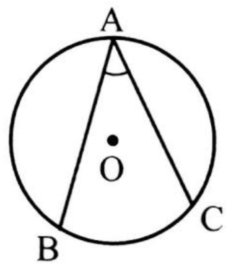
اندازه زایه محاطی :

اندازه هر زاویه محاطی برابر با نصف اندازه کمان روبه رو آن است یعنی در هر سه حالت زیر داریم: $\hat{A}=\frac{\widehat{BC}}{۲}$

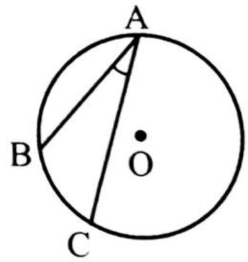
❶ **حالت اول:** یک ضلع زاویه محاطی وتری ازدایره باشد



❷ **حالت دوم :** دو ضلع زاویه محاطی در دو طرف مرکز قرار باشند.

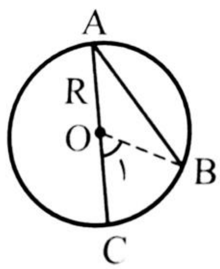


❸ **حالت سوم :** دو ضلع زاویه محاطی در یک طرف مرکز باشند.



اثبات: این قضیه را در سه حالت اثبات می کنیم:

حالت اول: یک ضلع زاویه محاطی، قطری از دایره باشد.



از O به B وصل می کنیم تا مثلث متساوی الساقین OAB $(OB=OA)$ ایجاد شود. یعنی زاویه‌های مجاور ساق‌ها با هم برابرند $\hat{A}=\hat{B}$ بنابراین:

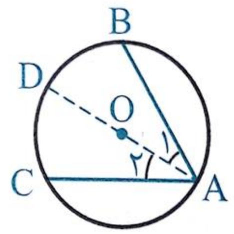
از طرفی $\hat{O}$ زاویه مرکزی است، واندازه‌ی هر زاویه مرکزی با کمان مقابلش برابر است یعنی : $\hat{O}_{۱} = \overset{\frown}{BC} \quad (۲)$

طبق (۱) و (۲) داریم : $\hat{A} = \dfrac{\overset{\frown}{BC}}{۲}$

❁ **یادآوری:** هر زاویه‌ی خارجی با مجموع دو زاویه داخلی غیرمجاورش برابر است.

حالت دوم: دو ضلع زاویه محاطی در دو طرف مرکز دایره باشد.

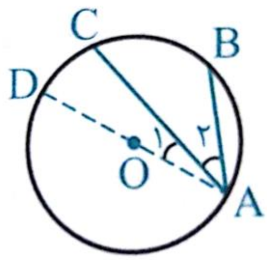
ابتدا مطابق شکل قطری از دایره را که از رأس A می‌گذرد، با توجه به حالت اول داریم:



$$\left.\begin{aligned}\hat{A}_{۱} &= \frac{\overset{\frown}{BD}}{۲}\\ \hat{A}_{۲} &= \frac{\overset{\frown}{DC}}{۲}\end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{جمع طرفین}} \hat{A}_{۱} + \hat{A}_{۲} = \underbrace{\frac{\overset{\frown}{BD}}{۲} + \frac{\overset{\frown}{DC}}{۲}}_{\hat{A} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}} \Rightarrow \hat{A} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}$$

حالت سوم: دو ضلع زاویه محاطی در یک طرف مرکز دایره واقع شده باشند.

قطر AD را رسم می‌کنیم طبق حالت اول داریم:

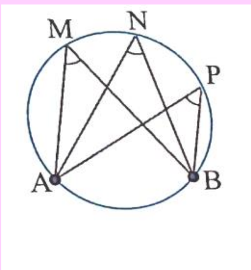


$$\left.\begin{aligned}\hat{A} &= \frac{BD}{۲}\\ \hat{A}_{۱} &= \frac{DC}{۲}\end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{تفاضل طرفین}} \underbrace{\hat{A} + \hat{A}_{۱}} = \underbrace{\frac{\overset{\frown}{BD}}{۲} + \frac{\overset{\frown}{DC}}{۲}}_{\hat{A}_{۲} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}} \Rightarrow \hat{A}_{۲} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}$$

✪ **نتیجه :**

❶ در هر دایره اندازه‌ی زاویه‌های محاطی روبه‌روی یک کمان، با هم برابرند.

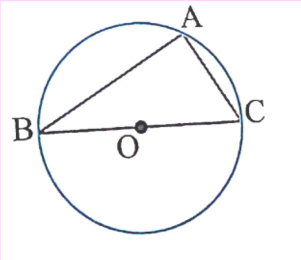
در شکل رو به رو اندازه‌ی زاویه‌های M، N و P با هم برابر است. چون همگی مقابل به یک کمان هستند.



$$M = \hat{N} = \hat{P} = \frac{۱}{۲}\overset{\frown}{AB}$$

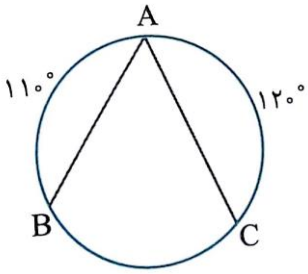
2 زاویه ی محاطی رو به رو به قطر دایره ۹۰° است. چون قطر دایره، دایره را به دو کمان ۹۰ درجه تقسیم می کند.

به عبارت دیگر در شکل رو به رو اگر BC قطر دایره باشد، آن‌گاه :



$$BAC = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲} = \frac{۱۸۰^\circ}{۲} = ۹۰^\circ$$

مثال ۴: در دایره‌ی شکل مقابل، اندازه‌ی زاویه A را به‌دست آورید.



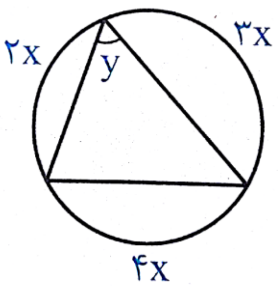
راه حل: دایره در حالت کلی کمانی با اندازه‌ی ۳۶۰ درجه است. از این مطلب استفاده کرده و اندازه ی کمان BC را به دست آوریم.

$$\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BC} = ۳۶۰^\circ \Rightarrow ۱۱۰^\circ + ۱۲۰^\circ + \overset{\frown}{BC} = ۳۶۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{BC} = ۱۳۰^\circ$$

از طرفی می‌دانیم اندازه‌ی یک زاویه‌ی محاطی نصف کمان مقابلش است، پس

$$\hat{A} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲} = \frac{۱۳۰^\circ}{۲} = ۶۵^\circ$$

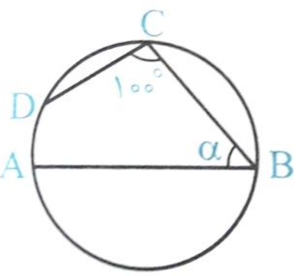
مثال ۵: در شکل مقابل x و y را محاسبه کنید.



$$۲x + ۳x + ۴x = ۳۶۰^\circ \Rightarrow ۹x = ۳۶۰^\circ \Rightarrow x = ۴۰^\circ$$

$$\Rightarrow y = \frac{۴x}{۲} = ۲x = ۸۰^\circ$$

☑ **تست:** در دایره مقابل AB قطر و $CD = BC$ است. مقدار α چند درجه است؟



۱) ۵۰ ۲) ۶۵

۳) ۶۰ ۴) ۵۵

پاسخ:

$$B\hat{C}D = \frac{\overset{\frown}{BAD}}{۲} \Rightarrow ۱۰۰^\circ = \frac{\overset{\frown}{AD}+۱۸۰^\circ}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{AD} = ۲۰۰^\circ - ۱۸۰^\circ = ۲۰^\circ$$ زاویه محاطی

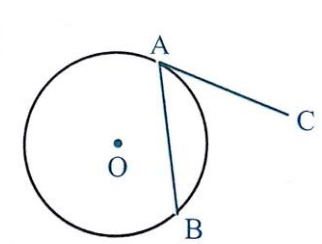
$$\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{CD}+\overset{\frown}{BC} = ۱۸۰^\circ \xrightarrow{\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{BC}} ۲۰+۲\overset{\frown}{CD} = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{CD} = \frac{۱۶۰^\circ}{۲} = ۸۰^\circ$$

زاویه محاطی است $\alpha = \frac{ADC}{۲} = \frac{AD+CD}{۲} = \frac{۲۰^\circ+۸۰^\circ}{۲} = ۵۰^\circ \Rightarrow$ گزینه (۱) درست است

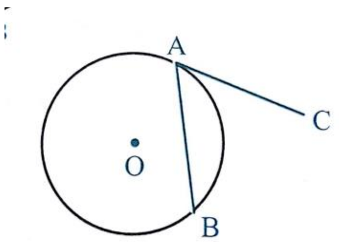
زاویه ظلی و اندازه آن :

زاویه ظلی: زاویه‌ای است که راس آن روی دایره می‌باشد یکی از اضلاع آن وتری از دایره و ضلع دیگرش مماس بر دایره است.

مانند $B\hat{A}C$ در شکل مقابل:



قضیه: اندازه هر زاویه ظلی، برابر نصف کمان رو به روی آن است. یعنی در شکل مقابل:



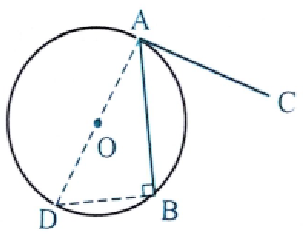
$$C\hat{A}B = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$$

اثبات روش اول:

زاویه ظلی است: فرض $C\overset{\Delta}{A}B$

حکم: $C\hat{A}B = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$

قطر AD را رسم می کنیم.



سپس از D به B وصل می‌کنیم B زاویه محاطی مقابل به قطر است. در نتیجه $\hat{B}=\frac{\overset{\frown}{AD}}{۲}=۹۰$

بنابر این:

$$A\hat{D}B+D\hat{A}B=۹۰^\circ \qquad (۱)$$

$$D\hat{A}B+B\hat{A}C=۹۰^\circ \qquad (۲)$$

چون خط مماس در نقطه تماس بر شعاع دایره (OA) عمود است: پس از (۱) و (۲) داریم:

$$\left.\begin{array}{r} B\hat{A}C=A\hat{D}B \\ A\hat{D}B=\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲} \end{array}\right\} \Rightarrow B\hat{A}C=\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$$

اثبات به روش دوم :